N° d'enregistrement au
C.N.R.S. A03551

ARTICLE PRINCIPAL

Recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE
PARIS

par

Mme Monique Liliane PAVEL

pour obtenir

le grade de Docteur ès-Sciences

Sujet de la Thèse : Ensemble de travaux d'analyse fonctionnelle et de reconnaissance des structures.

Soutenue le 14 novembre 1969 devant la Commission d'Examen

MM.	LELONG	Président
	LIONS	Exminateurs
	NIVAT	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552220_0016

N° d'enregistrement au
C.N.R.S. A03551

ARTICLE PRINCIPAL

Recouvrant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE
PARIS

par

Mme Monique Liliane PAVEL

pour obtenir

le grade de Docteur ès-Sciences

Sujet de la Thèse : Ensemble de travaux d'analyse fonctionnelle et de reconnaissance des structures.

Soutenue le 14 novembre 1969 devant la Commission d'Examen

MM.	LELONG	Président
	LIONS	Exminateurs
	NIVAT	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

FONDEMENTS MATHEMATIQUES DE LA RECONNAISSANCE DES STRUCTURES

par

Monique PAVEL

PARIS
1968

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	0.1 à 0.10
PREMIERE PARTIE - Modèle mathématique de la reconnaissance des structures.	I.1
Chapitre 1 - Grammaires de structures pures	I.5
1.1. - Signes et configurations	I.6
a. Signes	I.6
b. Configurations	I.9
1.2. - Images	I.12
a. Opérateur de réduction (ou de simplification) Représentation d'une image.	I.15
b. Génération et décomposition des ensembles d'images et des images	I.18
1.3. - Structures (pures)	I.25
Chapitre 2 - Grammaires de Structures déformées	I.28
2.1. - Grammaires de déformation	I.29
2.2. - Grammaires métriques de déformation	I.37
a. Distances invariantes	I.37
b. Construction de distances invariantes	I.39
c. Construction de fonctions de reconnaissance	I.46
2.3. - Grammaires probabilistes de déformation	I.49
a. Définition des grammaires probabilistes de déformation et propriétés d'invariance	I.50
b. Construction de fonctions de reconnaissance lorsqu'est donnée une mesure de probabilité sur $\mathfrak{D}$	I.52

c. Construction de fonctions de reconnaissance lorsque sont données des mesures de probabilité a priori sur $\mathcal{P}$ et conditionnelles sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ I.54

Chapitre 3 - Applications I.55

3.1. - Structures cycliques I.57

a. Grammaire des images pures I.57
b. Grammaire des déformations I.59
c. Fonctions de reconnaissance I.59

3.2. - Structures de permutation I.64

a. Grammaire des images pures I.65
b. Grammaire des déformations I.69
c. Fonctions de reconnaissance I.70

3.3. - Structures groupales I.75

a. Grammaire des images pures I.75
b. Grammaire des déformations I.77
c. Fonction de reconnaissance I.78

3.4. - Structures curvilignes I.79

a. Grammaire des images pures I.79
a.1. Structures euclidiennes I.79
a.2. Structures différentielles I.81
b. Grammaire des déformations I.87
b.1. Structures euclidiennes I.87
b.2. Structures différentielles I.88
c. Fonction de reconnaissance I.89

3.5. - Structures de contraste I.91

a. Grammaire des images pures I.91
b. Grammaire des déformations I.97
c. Fonction de reconnaissance I.99 à I.99

DEUXIEME PARTIE - Automates finis et problèmes de reconnaissance II.1

Chapitre 4 - Automates finis II.4

4.1. - Généralités sur les grammaires et les automates II.4

4.2. - Définitions des automates finis II.12

4.3. - Automates non-déterministiques II.17

4.4. - Théorèmes de caractérisation des ensembles réguliers II.22

4.5. - Théorèmes de caractérisation de la famille des ensembles réguliers II.28

Chapitre 5 - Problèmes de décision pour les automates finis II.37

5.1. - Consistance des ensembles acceptés II.37

5.2. - Equivalence des automates finis II.40

a. Machines séquentielles complètes II.40

b. Equivalence des automates II.50

Chapitre 6 - Généralisations II.54

6.1. - n-automates II.54

6.2. - Automates incomplets II.60

6.3. - Automates à mouvement dans les deux sens II.63

6.4. - Automates à deux rubans II.66

6.5. - Automates à arbres II.71 à II.77

BIBLIOGRAPHIE B.1 à B.3

INDEX TERMINOLOGIQUE J.1 à J.7

INTRODUCTION

1. Délimitation du domaine.

La reconnaissance automatique des structures couvre actuellement un domaine d'application assez bien défini. Il s'agit principalement de la lecture des textes écrits, imprimés ou manuscrits, et de l'analyse et la synthèse de la parole, mais aussi de la recherche dans un fichier d'empreintes digitales, du tri de plaques photographiques provenant d'expériences de physique nucléaire, de l'analyse photométrique de la cellule sanguine, de l'exploitation des photographies de reconnaissance aérienne. Cette liste est loin d'être exhaustive ; il faut cependant remarquer que presque toutes les applications ont pour but de résoudre l'un ou l'autre de ces deux problèmes voisins que sont la suppression du goulot d'étranglement que constituent les entrées des calculateurs, et l'exploitation de documents non codés lorsque leur volume devient intolérable (jusqu'à des centaines de mille sinon des millions).

A ces problèmes économiques se rapportant à la reconnaissance des formes visuelles et sonores, on peut ajouter des problèmes moins directement économiques ayant trait au language littéraire ou musical comme l'analyse des structures apparaissant dans une oeuvre, ou encore ayant trait aux structures mentales ou caractérielles humaines comme l'analyse du processus de décision des juges.

Enfin, on pourrait étendre la reconnaissance des structures à la reconnaissance des signaux électromagnétiques ou acoustiques, d'une façon générale des signaux. Nous nous limiterons à la reconnaissance des formes visuelles et sonores et aurons plus particulièrement en vue les premières.

2. Analyse de la notion de structure.

a) Dans la langue courante, structure (du latin structura, de struere : construire) est la manière dont les parties d'un tout sont arrangées entre elles, dont une chose est construite, disposée, agencée. Le terme de structure revêt une double signification, l'une descriptive, l'autre normative : il y a à la fois une idée de conception et une idée de modèle.

Pour les psychologues de la Gestalthéorie (de l'allement, Gestalt : structure) - en français théorie de la forme - la structure est un ensemble organique (un invariant qui ne change pas à travers les modifications ou l'évolution d'un système) qui serait perçu d'emblée avant que chaque détail soit isolé, un groupe d'éléments perçus dans leur totalité comme n'étant plus le produit d'un assemblage au hasard. Il y a alors émergence d'une forme dans le bruit, naissance de caractères identifiables, naissance d'une structuration minimale perceptible. Si nous définissons comme forme tout ce qui émerge d'un bruit aléatoire, nous pourrons admettre que le catalogue des formes est illimité, et que chaque forme répertoriée est l'objet d'une convention. Il faut donc que les critères d'identification d'une forme se reproduisent au moins deux fois. On rejoint les sens que donne au mot structure le langage courant.

Ce retour succint aux sources linguistiques et philosophiques met en évidence ce qu'il y a de fondamental dans l'idée de structure à savoir les notions - que nous retrouverons au cours de ce paragraphe et au suivant - d'invariance, de description, de modèle et d'émergence d'un bruit.

b) Les structures les plus élémentaires que l'on rencontre usuellement sont les figures géométriques. Or, incontestablement, elles sont caractérisées par leurs propriétés intrinsèques, c'est à dire par la constance de certaines fonctions à travers diverses transformations. C'est au reste le but des géométries, définies par la donnée d'un espace topologique et d'un ensemble de transformations de cet espace, que d'étudier les systèmes invariants par rapport à cet ensemble. Une structure sera donc initialement caractérisée par des invariants - que nous appellerons structuraux - et qui peuvent être algébriques ou topologiques.

Dans la pratique, il faut tempérer ce point de vue. C'est que d'abord un nombre fini d'invariants ne suffit pas toujours à caractériser exactement une forme, et qu'il serait alors impossible de tous les analyser. On est donc conduit à n'en considérer qu'une quantité limitée sinon très limitée.

On pourrait certes y pallier en pondérant les attributs observés (cas de deux maladies présentant des symptômes visibles communs), en notant d'ailleurs que cela correspond dans certains cas à une attitude psychologique naturelle. Ainsi les figures 1 et 3 se ressemblent, non 2.

1 2 3

On pourrait y pallier encore en complétant les attributs retenus comme caractéristiques, devant toujours être présents, donc de nature déterministe, par des attributs de nature aléatoire, d'autant que les formes de la vie courante sont par rapport aux formes géométriques pures accompagnées d'un certain bruit. Ensuite et enfin, l'information enregistrée dans les machines est de nature essentiellement discrète. Tout cela concourt à réduire et affecter cette information nécessaire à l'identification d'une structure, si bien que cette notion revêt un caractère approché, et qu'à une définition stricte à partir d'une communauté d'attributs ou d'invariants structuraux, on adjoint des considérations de distance ou de probabilité de ressemblance.

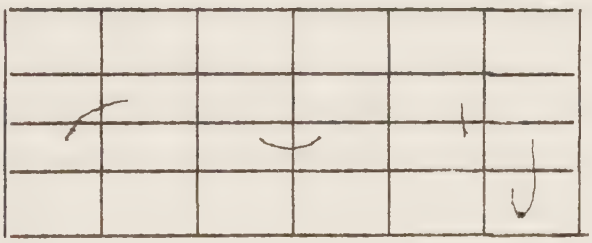
c) Si les invariants structuraux permettent en tous cas de définir les formes géométriques simples en l'absence de bruit, ou avec une certaine approximation en présence de bruit, ils peuvent devenir inéconomiques dès que celles-ci deviennent complexes. Raisonnons, pour revenir à des préoccupations pratiques essentielles, sur la reconnaissance des lettres de l'alphabet latin. On peut introduire des nuances entre les caractères imprimés majuscules, imprimés minuscules et manuscrits. Les premiers se rapprochent des figures géométriques et ne subissent pas - pour un même corps - de déformations majeures. Il n'en est pas de la sorte, même pour un seul individu, des caractères manuscrits. Ils ont cependant tous un point commun : c'est que leurs structures ne se définissent pas simplement par une ou plusieurs propriétés géométriques. On les définit alors descriptivement. Ainsi le b minuscule manuscrit peut être défini comme étant formé d'une courbe convexe fermée à laquelle on ajoute un jambage à gauche dirigé vers le haut, ayant à son tour ou non une boucle. La courbe convexe peut ne pas être rigoureusement fermée ; elle peut être terminée à droite par une espèce d'apostrophe : *b*. Mais admettons une seule définition : toutes les autres formes sembla-

bles se définiront par une même structure d'assemblage de certains éléments déterminés. D'où l'idée d'une analyse et donc d'une reconnaissance grammaticales des images. Précisons qu'il y a à la fois une définition grammaticale de l'ensemble et une définition géométrique de chacun des éléments.

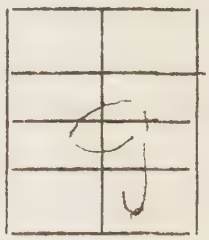
En reprenant un exemple de M. EDEN 21 , les lettres manuscrites de l'alphabet latin pourraient se décrire à l'aide des quatres éléments ou signes figurés ci-contre :

(1) (2) (3) (4)

que l'on combine par concaténation et par un certain nombre de règles précisant l'emplacement des signes au sein d'une lettre et la façon de les joindre.



Séquence des signes intervenant dans l'écriture de la lettre g



Représentation de la lettre g après application des règles de concaténation.

Ici aussi, comme pour les figures géométriques simples, des déformations peuvent venir affecter la structure de l'objet (structure de chacun des éléments pris isolément, structure de l'ensemble, c'est à dire structure grammaticale), et cela avec une probabilité d'autant plus grande que la structure est plus complexe. On peut donc être amené à compléter la définition de la structure telle qu'elle ressort des lignes précédentes - et indépendamment des notions de proximité qui interviennent au niveau de chaque signe,

mais que l'on pourrait faire intervenir également au niveau de la lettre - par un recours au contexte (positions respectives des voyelles et des consonnes, impossibilité de certaines successions de lettres, fréquence d'apparition de telle lettre dans l'ensemble des phrases de la langue française, etc...).

d) Continuons avec cet aspect grammatical de l'analyse des structures. Il existe un certain nombre de grammaires particulières permettant d'engendrer des formes visuelles déterminées, et qui ressortent toutes actuellement à des grammaires context-free, parfaitement adaptées à la nature séquentielle des machines à calculer digitales, et que l'on pourrait qualifier d'unidimensionnelles dans la mesure où l'agencement des mots dans une phrase est apparemment entièrement décrite à l'aide de la loi de concaténation. Il a fallu donc, et il faut donc résoudre à chaque fois un certain nombre de problèmes (cf. R.A. KIRSCH 19) pour adapter la structure bidimensionnelle des formes visuelles planes à la structure unidimensionnelle de la grammaire utilisée, ou pour développer une grammaire bidimensionnelle. Le premier est d'élaborer un substitut adéquat de la notion de concaténation : ce sera celle de justaposition et de superposition, toutes deux à préciser pour rendre compte des différents cas possibles. Le deuxième problème qui se pose est celui de l'analyse syntaxique qui se fait dans les phrases grammaticales courantes de la gauche vers la droite. Un troisième problème, lié à la reconnaissance comme le second, est celui de l'identification des symboles élémentaires, ou primitifs, ou signes. Enfin un dernier est celui de la représentation des phrases par des arborescences : dans l'analyse des formes planes, il y a probablement lieu de considérer des représentations arborescentes tridimensionnelles.

e) C'est cet ensemble de notions que l'on a cherché à formaliser dans ce cours et, en particulier, dans sa première partie. On partira d'un ensemble de symboles élémentaires ou signes, auxquels pourront s'appliquer des transformations que l'on appellera des similitudes. Ces signes se combineront en phrases ou configurations au moyen de règles, certes syntaxiques, mais que l'on ne rattachera pas à des grammaires particulières. Restant sur le plan formel, les images en seront directement issues, et se trouveront être des représentants de classes d'équivalence. Les déformations s'intro-

duiront tant au niveau des signes qu'au niveau de la phrase, c'est à dire de l'image toute entière. Enfin, les structures seront formées de classes disjointes d'images semblables, et la reconnaissance consistera à définir une application conduisant d'une image déformée - celle que l'on observe - à une structure donnée.

3. Le problème de la reconnaissance.

a) Il y a déjà lieu de distinguer, comme nous l'avons vu, deux cas : celui où l'image est prise globalement et assimilée à un signe unique, et celui où l'image est composite et formée de plusieurs signes. Cette distinction est basée sur des considérations de complexité de formes, mais pas seulement. Quoiqu'en général les formes complexes sont plutôt tributaires de la deuxième analyse, si le catalogue des structures est en nombre restreint, on peut très bien considérer une image comme faisant un tout, c'est à dire la considérer comme un signe. C'est le cas par exemple de la reconnaissance des lettres majuscules d'un seul alphabet imprimées dans un seul corps.

On peut alors concevoir 3 types prépondérants de techniques de reconnaissance :

α) une technique de masque consistant simplement à évaluer la distance de l'image observée à un prototype pris comme modèle ;

β) toujours dans le cas des signes uniques, une technique basée sur la recherche d'invariants structuraux ;

γ) enfin, dans le cas d'images composées, une technique basée à la fois sur une analyse grammaticale de l'image et sur une identification des signes primitifs.

b) Sur le plan proprement mécanique, l'image est observée à l'aide d'un appareil comportant des cellules sensibles, qui est le capteur, et qui recueille l'information relative à cette image. Or cette information, tout au moins pour les formes visuelles, a une nature discrète, et est plus précisément constituée de noirs et de blancs aux noeuds d'un réseau rectangulaire (comme une photo bélino), disons de 1 et de 0 dans une matrice de points, au mieux de valeurs représentant des intensités lumineuses.

Il est évident que cette information brute est, telle que, difficilement exploitable, et qu'il faut lui faire subir un certain nombre de modifications: c'est la phase de prétraitement. Elle consistera d'abord à éliminer ce qui semble être affecté par le bruit additionnel comme le lissage des irrégularités, éventuellement à normaliser l'image en position. Mais même ainsi filtrée, l'information ne fait pas toujours ressortir ce qu'il y a d'essentiel. Prenons l'exemple d'une lettre, qui à l'oeil a une structure curviligne : elle aura une fois captée une certaine épaisseur. On pourra alors s'attacher, soit aux contrastes, c'est à dire aux contours, soit à lui restituer son allure de courbe, c'est à dire en extraire un squelette significatif, par exemple ce qui généraliserait un axe de symétrie.

Les techniques utilisées sont diverses, mais on notera qu'elles supposent une étude du contexte dans lequel s'inscrit chaque point de la trame, de son voisinage. Ces points sont ainsi traités les uns après les autres en les comparant aux points adjacents, et en leur attribuant certaines valeurs. C'est sur cette information, disons digérée, que l'on devra opérer pour procéder à l'analyse de la structure.

c) A cette phase de prétraitement ou de traitement, succède une phase d'identification des invariants structuraux s'il s'agit d'un signe, ou de découpage de l'image en signes élémentaires si elle était composite. Ce découpage peut se faire par repérage des points singuliers : points de ramification, points d'inflexion, points de rebroussement, points terminaux, etc.. Il reste évidemment dans le deuxième cas à reconnaître chaque signe isolément, ce qui peut être fait assez facilement si les signes primitifs sont en petit nombre.

La phase d'identification est souvent appelée phase de mesurage, et l'appareil qui procède à la fois au prétraitement et au mesurage est le caractériseur.

Lorsqu'on n'effectue qu'un mesurage à la fois (examen d'une seule propriété), et que le choix du mesurage ultérieur en dépend, on a un arbre séquentiel simple. Si tous les mesurages étaient faits simultanément, on aurait une structure strictement parallèle. Si l'on n'a qu'un certain nombre de mesurages simultanés, le programme a une structure mixte.

En général, un arbre purement séquentiel est plus rapide puisqu'il a à effectuer moins de mesurages. (Il est vrai qu'il doit à chaque fois décider du mesurage suivant, mais la vitesse de prise de choix est d'ordinaire faible vis à vis de la vitesse de mesurage elle-même). Un tel programme, sans aucune branche redondante, est particulièrement sévère, en ce sens qu'il peut rejeter des propriétés essentielles de la structure à laquelle appartient l'objet, ou au contraire, accepter des propriétés d'une structure à laquelle il n'appartient pas (lorsque l'information captée est déformée). Aussi introduit-on de la redondance, soit en s'arrangeant pour la décision prise à chaque noeud mène à plus d'un noeud, soit en s'arrangeant pour que de nombreuses branches donnent la même décision, autrement dit en passant d'un arbre séquentiel à un arbre mixte, et si l'on était déjà parti d'un arbre mixte en le rendant plus parallèle.

On peut remarquer qu'il y a dans ces procédures empiètement sur la dernière phase qui est la phase de décision.

d) Si l'image est composée de plusieurs signes, on a à effectuer son analyse grammaticale, c'est à dire principalement à reconstituer sa structure arborescente.

De même que nous chercherons, comme nous l'avons dit, à donner un formalisme mathématique de la définition des structures, de même nous tâcherons de formaliser le problème de la reconnaissance des structures à partir de leur analyse grammaticale. C'est le problème inverse de la construction d'une phrase et plus généralement de la construction d'une grammaire ; le mécanisme qu'on lui attache est celui des automates. C'est leur étude qui fera l'objet de la deuxième partie de ce cours.

e) Si l'on poursuit le processus de reconnaissance, on en arrive à la phase finale qui est la phase de décision. C'est fondamentalement un problème de classification, à savoir celui de reconnaitre à laquelle des n classes disjointes $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ..., $\mathcal{P}_n$ appartient un objet, sachant qu'il appartient à l'une d'elles.

Or une image sera caractérisée par un certain nombre de paramètres (que ce soit les termes non nuls de la matrice booléenne de l'image filtrée, que ce soit les invariants structuraux, ou que ce soit même des paramètres significatifs de la structure grammaticale de l'image) pondérés ou non, et se représentera par un vecteur de R^n . Les classes $\mathcal{P}_i$ elles-mêmes délimiteront des domaines disjoints dans R^n . On peut alors adopter deux points de vue, l'un métrique qui fait appel à la notion de distance, l'autre probabiliste qui met en jeu la théorie statistique de la décision. Ces deux points de vue seront examinés au Chapitre 2 de la Première Partie, où nous en donnerons le formalisme général ; pour une étude détaillée des algorithmes de décision, en reconnaissance des structures on pourra se reporter à G.S. SEBESTYEN 42 , et pour la théorie statistique de la décision aux ouvrages classiques sur ce sujet.

Disons que l'appareil qui procède à la phase de décision est le catégorisateur.

f) Au processus de reconnaissance proprement dit, on adjoint généralement un processus d'apprentissage. En fait, ce dernier sert à optimiser les algorithmes de reconnaissance utilisés, et agit, pourrait-on dire, pendant la période où le catégorisateur n'est pas encore opérationnel. C'est qu'en effet, on ne sait pas toujours a priori les pondérations qu'il faut affecter aux différents attributs - dont on a volontairement limité le nombre pour des raisons économiques, mais qui peut être néanmoins très grand - permettant de placer avec le maximum d'exactitude un objet dans la classe à laquelle il appartient. C'est qu'également on ne connait pas toujours à priori la probabilité conditionnelle pour qu'un échantillon soit de structure donnée lorsqu'il comporte un certain nombre d'attributs donnés. On a donc recours à des processus d'apprentissage, qui sont des processus d'ajustements successifs, tendant à améliorer un comportement sous l'influence des contraintes révélées par l'expérience. Pour ces questions, que nous ne traiterons pas dans ce cours, on pourra consulter en particulier N.J. NILSSON 35 .

g) Il faut signaler, pour terminer le problème beaucoup plus général et plus difficile de la recherche d'une structure non donnée d'avance, où il s'agit de savoir s'il est possible d'introduire un partage en classes qui soit significatif, par rapport à un critère qui peut, suivant le cas, être

objectif ou subjectif ou les deux. Il est clair que seule une procédure d'apprentissage peut permettre de passer progressivement d'une ignorance à peu près complète à une connaissance de plus en plus précise.

Comme cette introduction l'a montré, il se pose un double problème d'une part de définition des structures, d'autre part de reconnaissance des structures, et pour prendre une image commode, d'une part de génération d'un langage, d'autre part de reconnaissance de ce langage. Ce sont ces deux aspects essentiels que nous avons voulu traiter. Cela nous a amené à diviser ce cours en deux parties, la première formalisant l'idée de structure, la seconde formalisant par l'intermédiaire des automates les processus de reconnaissance. Ce sont au demeurant les problèmes les plus spécifiques de la reconnaissance des structures.

PREMIERE PARTIE

MODELE MATHEMATIQUE DE LA RECONNAISSANCE DES STRUCTURES.

La Théorie mathématique exposée ci-dessous se propose de décrire les structures et les processus de reconnaissance observés dans la nature, et de construire des processus qui soient les meilleurs possibles dans un sens qui s'explicitera par la suite ; elle permettra de donner un langage précis à l'analyse, la description et la reconnaissance des structures(*).

On se propose ici de fonder les structures à la suite d'un processus où l'on a d'abord décomposé le mécanisme de création des objets ou images que nous observons. L'accent sera donc surtout mis sur l'analyse de ces images ; c'est alors seulement que l'on pourra baser la construction d'algorithmes de reconnaissance qui consisteront à comparer un ensemble de signes agencés d'après certaines lois avec le prototype de ce qu'on suppose être son "nom" ou sa "structure", puis à en mesurer l'écart ; s'il est trop grand on changera de signes ou de lois.

D'un point de vue formel, ce modèle est linguistique en ce qu'il s'attache à créer un formalisme permettant de décrire et d'analyser une structure, non pas simplement en énumérant des propriétés, mais en mettant l'accent sur la génération des objets que nous observons, c'est à dire en spécifiant des règles de génération et de transformation par similitude, donc en liant les différentes parties d'une image. Cette approche est fondamentalement celle des grammaires génératives. Les outils relèveront surtout de la théorie des semi-groupes et des groupes.

(*) On suppose que l'on a préalablement suffisamment de connaissances sur le contexte pour être capable de dire si le caractère à reconnaître est un chiffre ou une lettre, un mot français ou un mot anglais, etc...

Ce modèle comporte trois niveaux : le niveau grammatical, où l'on spécifie la génération des images ; le niveau des approximations, métriques ou probabilistes, où l'on mesure l'écart d'images "déformées" à des structures "pures" ; et le niveau algorithmique qui se préoccupe des algorithmes de reconnaissance.(*)

Les modèles qui s'en approchent le plus sont probablement celui de la théorie de la perception, dû à PITTS et MC CULLOCH 37 (**) et un essai récent d'analyse de la perception visuelle dû à HOFFMANN 18 . Les premiers auteurs qui, dans la pratique, ont effectué une analyse grammaticale sont R.A. KIRSCH 19 sur des figures géométriques, R. NARASHIMAN 32 sur des chambres à bulles, LIPKIN-WATT-KIRSH 23 sur des images biomédicales, M. EDEN 7 sur des caractères manuscrits, et GRASSELLI 14 sur des empreintes digitales.

L'idée de concevoir un modèle mathématique du problème en partant de l'analyse grammaticale est dûe à U. GRENANDER, qui nous a aimablement communiqué ses travaux non encore publiés 16 et 17 ; nous nous en sommes inspirés dans cette première partie.

Nous diviserons l'étude de ce modèle en trois chapitres : les 2 premiers auront trait à ce que nous appellerons des structures pures, respectivement déformées (les termes "pures" et "déformées" ont des contenus intuitifs évidents ; ils se préciseront, surtout par opposition, lors de l'étude des structures déformées), le troisième exposera quelques exemples d'applications.

(*) On suppose que les images ont subi un pré-traitement pour être amenées à une forme à laquelle l'algorithme de reconnaissance est applicable ; le pré-traitement des caractères alphanumériques a été traité, entre autres, par SHERMAN 44 .

(**) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin du cours.

Le premier chapitre concerne la théorie des grammaires de structures pures. Il spécifiera les éléments de la grammaire, à savoir les signes, aussi bien que les règles de composition des signes ou les lois de génération des images, et les lois de transformation des images entre elles. Ces dernières transformations seront constituées en groupe. On dira que deux images sont semblables, si elles sont stables par rapport à un groupe G de transformations, et la reconnaissance sera celle de classes d'équivalence. Même avec cette restrictition (la restriction pour G d'être un groupe dont chaque élément $g \in G$ est défini sur tous les signes $s \in S$), les grammaires obtenues couvrent un champ assez large de cas différents, se rapportant au surplus à des applications concrètes.

Le deuxième chapitre s'attaque aux grammaires de déformation. Les structures de la vie réelle se laissent en effet rarement décrire de façon exacte à l'aide d'une simple grammaire de structures pures. Il faut y ajouter un mécanisme de déformation $\mathcal{D}$ appliquant l'ensemble $\mathcal{I}$ des images pures I dans un ensemble $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$, l'ensemble des images déformées. Ces déformations sont des distorsions des éléments, des bavures, ou au contraire des impressions mal venues. On a en somme le processus de génération suivant :

$$\mathcal{P}_\gamma \ni I \xrightarrow[\mathcal{D}]{} I^{\mathcal{D}} ,$$

où une image I appartenant à la structure $\mathcal{P}_\gamma$ est transformée par $\mathcal{D}$ en l'image déformée $I^{\mathcal{D}}$. En fait, c'est $I^{\mathcal{D}}$ que l'on observe et il s'agit de trouver une fonction de reconnaissance qui applique $I^{\mathcal{D}}$ dans l'ensemble des structures pures. Mais $I^{\mathcal{D}}$ n'est pas une image pure, et l'on est amené à mesurer l'écart de $I^{\mathcal{D}}$ à des images pures voisines, soit en introduisant une métrique - on aura alors une grammaire métrique de déformation - soit en introduisant une distribution de probabilité sur l'ensemble de toutes les déformations - on aura alors une grammaire probabiliste de déformation.

Le troisième chapitre concerne l'analyse et l'étude de grammaires particulières de structures pures et de déformations et a pour objet de préciser les idées développées dans les deux premiers chapitres et de montrer des domaines d'application possibles.

Il reste à ajouter que ce modèle pourrait être étoffé au moins de deux manières : d'une part à l'aide de la théorie des invariants qui permettrait de formaliser ou d'expliciter la nature des transformations de similitude $g \in G$ ou des déformations $d \in \mathcal{D}$, d'autre part en s'appuyant sur des considérations topologiques qui pourraient permettre également d'expliciter G, $\mathcal{D}$, ou le seuil à partir duquel une transformation n'est plus une similitude mais est une déformation ; enfin, et de façon essentielle, on pourrait ne pas supposer que les structures sont données mais mieux préciser comment partitionner un ensemble d'images en classes.

CHAPITRE I

GRAMMAIRES DE STRUCTURES PURES.

L'observateur humain ou mécanique qui se propose de reconnaître des structures, se trouve en présence de deux catégories d'objets : un ensemble $\mathcal{I}$ de classes d'images qu'on lui présente et un ensemble $\mathcal{P}$ donné de structures c'est à dire de classes de caractéristiques fondamentales différentes. La fonction de reconnaissance est une application de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{P}$ qui classe l'image $I \in \mathcal{I}$ suivant la structure $P \in \mathcal{P}$ (si elle existe) à laquelle elle appartient. On classera dans une même structure des images qui ont, par exemple, les mêmes propriétés géométriques, c'est à dire qui sont stables par rapport à un ensemble G de transformations ; on appellera semblables de telles images. On entendra en définitive par structure une famille $\mathcal{P}$ de sous-ensembles $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n, \ldots$ disjoints et stables par rapport à G de la grammaire image $\mathcal{I}$.

L'image incorpore donc toutes les quantités observables. Cela veut dire qu'elle est constituée d'une part d'une quantité d'information, disons un ou plusieurs vecteurs c appelés configurations qui sont, en quelque sorte, des paramètres de l'image ; d'autre part, qu'à celle-ci s'ajoute la signification que lui accorde l'observateur qui peut, par exemple, fonder sa discrimination non pas toujours ou uniquement sur l'analyse détaillée des composantes $s_1, \ldots, s_n$ du vecteur c , mais aussi sur des critères globaux. Cela nous conduit à considérer certaines configurations comme identiques, même si elles sont présentées sous des formes différentes ; l'observateur peut reconnaitre deux caractères alphanumériques, par exemple, comme ayant même signification s'ils sont constitués par les mêmes traits et si les positions relatives de ces traits sont les mêmes, mêmes si l'ordre dans lequel ont été écrits ces traits est différent (par contre, l'ordre est significatif dans le cas d'analyses "en temps réel"). La règle d'identification, qui est aussi une relation d'équivalence, permet d'organiser l'ensemble C des configurations signifiantes en un ensemble de classes d'équivalence $\mathcal{I} = C/R$; les classes $I \in \mathcal{I}$ s'appellent des images. Désignons enfin par S l'ensemble des éléments (les traits) composant les configurations considérées ; ces éléments seront appelés des signes.

$\mathcal{G} = (S, \mathcal{I}, G, \mathcal{P})$

s'appellera une grammaire de structures pures et ce chapitre se propose de définir les éléments de ce quadruplet et leurs lois de composition.

Ce chapitre se décomposera en trois paragraphes, le premier portant sur les signes et configurations, le second sur les images et le troisième sur les structures (pures).

1.1. Signes et configurations.

a. Signes.

Les éléments premiers qui permettent de former les configurations, les images et les structures, s'appellent signes(*) et sont désignés par s ; ils constituent un ensemble fini dénommé S . S contient le signe nul $\emptyset$.

Dans le modèle général S n'est soumis a priori à aucune condition.

Ces signes ne nous sont pas donnés dans une étude pratique, l'image précède en général le signe (sauf dans des cas particuliers comme le code Morse, par exemple, où les images sont à code connu). On se rend compte intuitivement que le choix de S est guidé par un certain nombre de critères économiques ou technologiques, tels que : les signes doivent être aussi simples que possible, le nombre des signes doit être petit, l'analyse qui s'ensuit doit être simple, etc... Il se peut que ces critères et d'autres soient contradictoires, ou insuffisants ; ils ne déterminent pas l'ensemble S d'une façon unique. Le choix de ce dernier est un problème de commodité et dépend aussi de l'approximation que l'on veut atteindre.

L'ensemble S peut être conçu comme un dictionnaire contenant le vocabulaire des mots que nous allons utiliser pour former des propositions. Ces propositions décriront les structures.

(*) On essaye ainsi de formaliser l'hypothèse (voir M. EDEN 7) qu'il est possible d'engendrer les caractères manuscrits à partir d'un nombre réduit de signes tels que arcs de cercles, segments de droite, etc...

Pour nous rendre compte des lois de composition qu'il faut postuler sur $\hat{S}$ et aussi pour arriver à classer les éléments de S, prenons d'abord un exemple. Si l'on considère les caractères majuscules imprimés de l'alphabet latin, on peut, par exemple, prendre comme signes des éléments de droite et des éléments de cercles : par justaposition et superposition de ces signes on peut former les caractères en question. On pourrait aussi, dans le même exemple, prendre des signes composites - éléments de cercles composés avec des éléments de droite - et considérer ces derniers comme signes élémentaires. On postulera donc : une idée d'ordre exprimant la différence de complexité même au niveau des signes ; une première idée de classification en différents types ; un ensemble de transformations qui conserve cette classification en types ; et, enfin, une loi de composition interne sur l'ensemble S des signes, loi qui découlera de celle que nous définirons sur les configurations.

α) Dans la mesure où l'on considère des signes composites, on peut établir une hiérarchie entre les signes élémentaires et les signes composites, c'est à dire munir l'ensemble des signes d'une structure d'ordre partiel. Un signe élémentaire aura pour "complexité" 1 ; un signe composite aura pour complexité le nombre de signes élémentaires dont il est composé.

β) On désignera par Σ l'ensemble des types (ou sous-programmes ou classes paradigmatiques σ_i auxquels peuvent appartenir les signes $s \in S$:

$$s \to \sigma_i(s) \in \Sigma \ , \ \forall s \in S \ .$$

Le sous-ensemble de S constitué par les signes s obtenus à l'aide du type σ_i sera désigné par S_{σ_i} :

$$S_{\sigma_i} = \{s \in S \ ; \ s \in \sigma_i(S) \ , \ \sigma_i(\Sigma)\} \ .$$

γ) Définissons maintenant une loi de composition externe sur S. On désigne par G un groupe de transformations g définies chacune sur S entier :

$$G : S \to S \ ;$$

Les opérateurs $g \in G$ seront appelés transformations de similitude. Deux signes s_1, $s_2 \in S$ seront semblables s'il existe une transformation g G telle que $s_1 = g\, s_2$; on écrit cela sous la forme $s_1 \equiv s_2 \pmod{G}$. On peut de cette façon réduire le nombre de signes constituant une structure. En reprenant l'exemple des caractères alphanumériques, on considérera comme semblables entre eux des arcs de cercle, respectivement des segments de droite, obtenus l'un de l'autre par rotation, translation, symétrie ou homothétie.

Les hypothèses relatives à la relation existant entre la classification en types et la similitude seront exprimées par le :

Postulat 1 (sur les types).

L'ensemble S des signes est divisé en sous-ensembles S_{σ_i}, $\sigma_i \in \Sigma$, les types, $S = \bigcup_i S_i$ et :

(i) $S_{\sigma_i} \cap S_{\sigma_j} = \emptyset$, $\sigma_i \neq \sigma_j$, $\sigma_i, \sigma_j \in \Sigma$;

(ii) si $s \in S_{\sigma_i}$ alors $g\, s \in S_{\sigma_i}$, $\forall s \in S$, $\forall g \in G$ (invariance des types par rapport au groupe G de transformations) ;

(iii) $g\, \emptyset = \emptyset$, $\forall g \in G$.

La relation de similitude définie par le groupe G est une relation d'équivalence qui définit une partition sur S :

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j \quad ; \quad S_i \cap S_j = \emptyset \ , \ i \neq j \ ; \ S_j = (s_j) = \{s_p, s_j = g\, s_p\} \ .$$

Cela résulte immédiatement du fait que G est un groupe et du Postulat 1 .

On appelle silhouette (ou masque) un représentant d'une classe d'équivalence.

Soit alors s_j , $j \in J$, le représentant de la classe S_j ; comme il appartient par ailleurs à un type S_{σ_i} , et un seul, on aura $S_j \in S_{\sigma_i}$ pour un j et un i donnés, et cela pour tous les j . Cela confère à la partition de S en types une structure pathématique : un type se confond avec une classe d'équivalence ou peut lui-même être décomposé en classes d'équivalence ; la partition $\{S_j ; j\}$ est un refinement de la partition $\{S_{\sigma_i} ; i\}$; $S/G \leq S/\Sigma$.

Problème de la reconnaissance des signes.

Tout signe $s \in S$, $s \neq \emptyset$, est de la forme $s \to (t,g)$, où t est une silhouette et $s = gt$, $g \in G$. Reconnaître le signe s revient à trouver la silhouette t ; le problème a une solution unique si g est donné.

b. Configurations.

On appelle configuration c une suite ordonnée de signes :

$$c = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \ , \ s_1 \ , \ s_2 \ , \ \ldots, \ s_n \in S \ ,$$

les composantes s_i du vecteur c pouvant appartenir à des types S_{σ_i} différents.

On définit sur l'ensemble des configurations une loi de composition interne, notée additivement : si $c = (s_1, \ldots, s_m \ , \ s_{m+1}, \ldots, s_n)$, on écrit $c = c_1 + c_2$, avec $c_1 = (s_1, \ldots, s_m)$, $c_2 = (s_{m+1}, \ldots, s_n)$; c'est la concaténation (cela peut représenter, par exemple, la juxtaposition ou la superposition). Cette loi est associative. L'ensemble des configurations est donc un semi-groupe libre avec unité (la suite vide $\emptyset$ est l'élément unité), donc un monoïde libre sur S .

On restreint l'ensemble ainsi défini de toutes les configurations à l'ensemble C des configurations grammaticales (ou significatives, ou encore admissibles) en imposant une loi de composition externe $(g,c) \to gc$, et une condition restrictive supplémentaire $\mathcal{R}$ par le

Postulat 2 (sur les configurations grammaticales).

L'ensemble C des configurations grammaticales doit avoir les propriétés suivantes :

(i) si $c = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in C$ alors $gc = (gs_1, gs_2, \ldots, gs_n) \in C$ pour tout $g \in G$ (invariance d'une configuration grammaticale par rapport à la similitude) ;

(ii) si $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in C$ alors $(s_\alpha, s_{\alpha+1}, \ldots, s_\beta) \in C$ pour $1 \leq \alpha \leq \beta \leq n$: une sous-configuration ordonnée (tranche de signes consécutifs) d'une configuration grammaticale est une configuration grammaticale.

Lorsque l'on part d'une similitude g et de deux signes s_1 et s_2 par exemple, on obtient deux autres signes s_1' et s_2', qui, combinés entre eux, donnent une configuration c' : (i) signifie que c' s'obtient à partir de c par la même transformation g . Comme, de plus, (i) doit être vrai pour tout $g \in G$, cela exclut certaines configurations (s_1, s_2). La condition (ii) signifie que si $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_p \in C$ alors $c_i \in C$, $\forall i$: une configuration grammaticale se décompose de quelque façon que ce soit en configurations grammaticales.

Cette condition restrictive $\mathcal{R}$ a pour but de formaliser la notion suivante : la machine (par exemple un automate générateur) qui engendre les signes peut n'être capable de produire que certaines suites c ; ou encore certaines suites seulement peuvent nous apparaître comme significatives. Pour savoir quelles suites doivent être considérées comme significatives, on doit faire appel à un certain ensemble $\mathcal{R}$ de règles. On peut demander, par exemple, que les traits soient liés continûment l'un à l'autre ou que certaines combinaisons soient illégales. Pour poursuivre l'analogie avec la linguistique où l'on part d'un dictionnaire de mots, disons que ceux-ci sont conjugués et déclinés suivant les règles paradigmatiques d'une grammaire. Les formes infléchies (signes semblables) sont alors combinées suivant des règles syntactiques.

Si toutes les suites finies formées à partir d'un ensemble S de signes s sont grammaticales, nous dirons que l'ensemble des configurations est un ensemble de configurations libres.

On posera donc pour l'ensemble C des configurations grammaticales engendrées par S la

Définition 1.

L'ensemble C des configurations grammaticales c engendrées par l'ensemble S des signes est un monoïde libre engendré par S à opérateurs de similitude $g, g \in G$, qui satisfait les trois groupes de propriétés :

I 1. $c_1 + c_2 \in C$, $\forall c_1, c_2 \in C$;

2. $(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3)$, $\forall c_1, c_2, c_3 \in C$;

3. $c+\emptyset = \emptyset+c = c$, $\forall c \in C$, $\emptyset \in C$ ($\emptyset$ est la suite vide) ;

4. si $c = (s_1, \ldots, s_n) \in C$ alors $\tilde{c} = (s_\alpha, s_{\alpha+1}, \ldots, s_\beta) \in C$, $1 \leq \alpha \leq \beta \leq n$.

II G est un groupe défini sur C entier.

III 1. $c \in C \Longrightarrow gc \in C$, $\forall g \in G$, $\forall c \in C$;

2. $g_1(g_2 c) = (g_1 g_2)c$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall c \in C$;

3. $g(c_1 + c_2) = gc_1 + gc_2$, $\forall g \in G$, $\forall c_1, c_2 \in C$.

Définition 2.

On appelle nombre minimal de signes d'une configuration c le plus petit nombre naturel n tel que la configuration c puisse être écrite sous la forme $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$; ce nombre se désigne par N(c).

Cette définition exprime un principe de réduction ; il suffit de penser à des parties de la configuration qui, dans une figure, se recouvrent exactement. L'analyse $c \to (s_1, \ldots, s_n)$ n'est en général pas unique.

Définition 3.

La complexité d'une configuration est la somme des complexités de ses signes.

Cette définition permet d'ordonner les configurations suivant leurs complexités lorsqu'elles sont réduites à un nombre de signe minimal.

Définition 4.

Deux configurations sont identiques si elles ont le même nombre de signes et si leurs signes sont identiques deux à deux. Cela revient à dire que deux configurations sont identiques lorsque, réduites à leur nombre minimal de signes, ce nombre est le même et les signes identiques deux à deux.

1.2. Images

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'image incorpore l'information et la signification que lui accorde l'observateur. Confronté avec des configurations de C, celui-ci peut considérer comme ayant la même signification deux configurations $c = (s_1,\ldots,s_n)$ et $c' = (s'_1,\ldots,s'_m)$ non identiques d'un point de vue formel, c'est à dire n'ayant pas leurs signes identiques deux à deux et ne présentant même pas le même nombre de signes : l'observateur peut les considérer comme représentatives d'une même image, il identifie c et c', ce que nous écrirons $c\ R\ c'$.

Si on considère, par exemple, des classes S_{σ_i} consistant en des arcs circulaires et si l'on prend pour G le groupe de transformations euclidiennes du plan, on peut identifier les configurations comme suit. Si $c = (s_1,\ldots,s_n)$, on part de l'origine dans le plan (x,y) et on trace un arc s_1 ayant une extrémité en $x = y = 0$ et ayant sa tangente dans la direction des x positifs. On place à l'autre extrémité l'arc s_2, en lui demandant d'avoir la même tangente que s_1 en ce point particulier.

Si l'on prend comme règle $\mathcal{R}$ la condition que des arcs voisins sont reliés par des tangentes continues, on obtient une courbe plane consistant en n arcs circulaires. Deux configurations seront équivalentes ou identifiées $c_1 R c_2$ si et seulement si les courbes représentatives sont identiques. Par exemple, les configurations (différentes) (a) et (b) de la Figure 1 doivent être identifiées, mais ne sont pas identifiées avec la configuration (c).

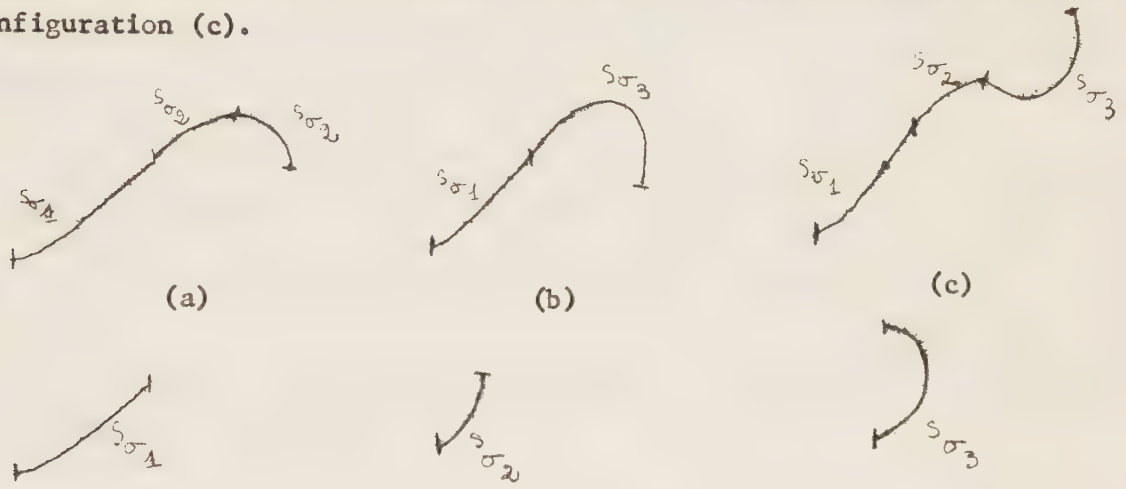


Fig. I

Postulat 3 (sur l'identification).

La relation d'identification R doit être telle que :

(i) si cRc' alors $gcRgc'$ pour tout $g \in G$; $c, c' \in C$ (invariance à gauche de l'identification par rapport à la similitude) ;

(ii) si $c = c_1 + c_2$, $c' = c'_1 + c'_2$, où $c_1, c_2, c'_1, c'_2 \in C$, et si $c_i R c'_i$ pour $i = 1,2$, alors cRc' (identification par paquets) ; R est une congruence ;

(iii) R est une relation d'équivalence (d'indice fini) ;

(iv) si c et c' n'ont aucun type de signes en commun, alors ou bien cRc' , ou bien $c = c' = \emptyset$.

Théorème 1.

Soit C un ensemble de configurations libres et $\mathcal{J}$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence I engendrées par la relation d'identification R définie sur C : $\mathcal{J} = C/R$.

On peut alors définir sur $\mathcal{J}$ une loi de composition externe gI , $g \in G$, $I \in \mathcal{J}$, et une loi de composition interne I_1+I_2 , $I_1, I_2 \in \mathcal{J}$, telles que :

(i) $\mathcal{J}$ est un monoïde pour la loi interne ;

(ii) la propriété de distributivité $g(I_1+I_2) = gI_1+gI_2$ a lieu ;

(iii) la propriété d'associativité $g_1(g_2I) = (g_1g_2)I$ a lieu.

Les classes I seront appelées <u>images</u> et l'ensemble $\mathcal{J}$ des classes I une <u>grammaire</u> (ou <u>algèbre</u>) <u>image</u>.

<u>Démonstration</u>

En vertu de la condition (iii) du Postulat 3 sur l'identification, les classes I sont bien définies, disjointes et recouvrent C entier, $\mathcal{J} = C/R$:

$$C = \bigcup_j I_j \quad ; \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \ .$$

Si $c = (s_1, \ldots, s_n) \in I$, on définit gI comme l'image contenant la configuration $gc = (gs_1, \ldots, gs_n)$ (g est défini sur tout S , donc sur tous les S_σ qui constituent S) ; cette définition est unique en vertu de la condition (i) du Postulat 3 : si c, c' appartiennent à I , gc et gc' appartiennent à gI . La deuxième loi de composition sur $\mathcal{J}$ est définie par : si $c_1 \in I_1$ et $c_2 \in I_2$, alors $I_1 + I_2$ est l'image contenant c_1+c_2 ; cette classe est unique en vertu de la condition (ii) du Postulat 3. La composition des configurations étant associative, il en est de même pour celle des images. (i) est démontré, et l'élément unité du semi-groupe $\mathcal{J}$ est la classe E qui contient la configuration $\emptyset$. (ii) et (iii) résultent des propriétés correspondantes des configurations.

Remarquons que l'application d'identification $R : C \to I$ n'a pas en général un inverse unique.

En prolongeant la définition de la similitude, des configurations aux images, on obtient la

Définition 5.

Deux images $I_1, I_2 \in \mathfrak{I}$ sont semblables s'il existe une transformation de similitude $g \in G$ telle que $I_1 = gI_2$.

a. Opérateur de réduction (ou de simplification). Représentation d'une image.

Nous nous proposons d'introduire ici un opérateur de réduction ou de simplification μ . Pour ce faire, nous supposerons l'existence d'un ordre partiel sur C , désigné par " $<$ " , qui rend comparables les configurations identifiées en une même image (pour chaque couple $c, c' \in I$ on a : $c < c'$, ou $c' < c$, ou $c = c'$) , et l'existence d'une propriété de treillis en vertu de laquelle tout sous-ensemble K de configurations c appartenant à une image possède au moins un élément $c_o \in K$ tel que $c_o < c$, $\forall c \in K : c_o$ est au moins aussi simple que toute autre configuration de l'image. (On peut par exemple penser à l'ordre introduit par la comparaison du nombre des signes de c et c' ou , d'une façon plus générale, à la complexité additive (cf. paragraphe 1.1.b.)). Il existe alors dans toute image $I \in \mathfrak{I}$, $I \subseteq C$, une configuration c_I au moins aussi simple que les autres configurations de la même image ; cela définit une application $\mu : C \to C$, en posant $\mu(c) = c_I$, $c \in I$. Le lien existant entre l'opérateur de simplification μ ainsi introduit et l'opérateur d'identification R est donné par le

Théorème 2.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur un ensemble C de configurations libres c une relation d'ordre partiel qui permette de comparer deux configurations c et c', et un opérateur R qui les identifie si elles appartiennent à la même image, est qu'il existe un opérateur de simplification (ou de réduction) μ de C dans C qui vérifie les conditions suivantes :

(i) μ conserve les images : si $\mu(c) = \mu(c')$ alors $\mu(gc) = \mu(gc')$, et si $\mu(c_i) = \mu(c_i')$, $i = 1,2$, alors $\mu(c_1+c_2) = \mu(c_1'+c_2')$ (μ conserve la linéarité(*)) ;

(ii) μ est idempotent : $\mu(\mu(c)) = \mu(c)$;

(iii) μ est monotone : $\mu(c) < c$ (réductivité(**)) ;

(iv) μ conserve partiellement les types : $\mu(c)$ possède au moins un type en commun avec c ;

c et c' c , $c' \in I$, sont alors identifiés si et seulement si ils se simplifient en une même configuration :

$$c \; R \; c' \iff \mu(c) = \mu(c') \; .$$

La condition est nécessaire.

On admet qu'un ordre partiel sur c , ainsi que R sont définis et on pose $\mu(c) = \mu(c')$ si $c \; R \; c'$. Supposons que pour tout ensemble de configurations d'une image on puisse choisir $c_I \in I$ tel que $c_I < c$, $\forall \, c \in I$. En posant $\mu : C \to C$, et $\mu(c) = c_I$ si $c \in I$ on vérifie d'abord la condition (i) : si $\mu(c) = \mu(c')$, alors c et c' appartiennent à la même image I , donc pour tout $g \in G$ les configurations gc et gc' appartiennent à gI , et $\mu(gc) = \mu(gc') = c_{gI}$. De même, si $\mu(c_i) = \mu(c_i')$, $i = 1,2$, alors c_1+c_2 appartient à la même image I_1+I_2 que $c_1'+c_2'$, donc : $\mu(c_1+c_2) = \mu(c_1'+c_2')$. μ est idempotent puisque $\mu(c) = c_I$, $\forall \, c \in I$, donc $\mu(\mu(c)) = \mu(c_I) = c_I$, et (ii) est démontré. La monotonie résulte de la définition de μ : $\mu(c) = c_I$ est au moins aussi simple que toute configuration de I , donc $\mu(c) = c_I < c$. La propriété (iv) est vraie puisque $cR\mu(c)$ est toujours vrai et implique, en vertu de la condition (iv) du Postulat 3 sur l'identification, que c et $\mu(c)$ ont au moins un type en commun.

(*) On ne pourrait pas se proposer de démontrer ici une propriété du type $\mu(gc) = g\mu(c)$ puisque c et gc appartiennent respectivement aux images différentes I et gI .

(**) Cette hypothèse n'intervient pas dans la démonstration de la suffisance.

Là condition est suffisante.

Considérons un ensemble C de configurations (avant que l'identification ait été effectuée) et un opérateur μ de simplification ayant les propriétés (i), (ii), (iv) (l'ordre partiel sur C et la monotonie ne sont pas requis). Définissons alors l'opérateur d'identification R par la condition :

cRc' si et seulement si $\mu(c) = \mu(c')$.

Il faut montrer que l'opérateur R ainsi introduit vérifie bien les quatres propriétés (i) à (iv) du postulat 3 sur l'identification. (i) et (ii) résultent de la propriété (i) de μ de conserver les images. (iii) est évident : l'opérateur μ est réflexif, symétrique et transitif, chaque classe d'équivalence appartenant à la partition induite par μ sur C contiendra toutes les configurations c dont les simplifiées $\mu(c)$ sont égales. $c \equiv c'(\mu)$ si et seulement si $\mu(c) = \mu(c')$. Enfin la condition (iv) du Postulat 3 résulte de la condition (iv) ci-dessus : si c et c' n'ont aucun type en commun, il en sera de même pour $\mu(c)$ et $\mu(c')$, et on aura $\mu(c) \neq \mu(c')$ c'est à dire cRc' .

Nous avons ainsi défini à l'aide de μ un opérateur d'identification R, et une image I sera l'ensemble des configurations c qui se simplifient de la même façon, c'est à dire en une même configuration :

$$I = \{c \ ; \ \mu(c) = a\} \ . \qquad (1)$$

Comme μ est idempotent on a $\mu(a) = \mu(\mu(c)) = \mu(c) = a$, d'où $a \ I$. Il correspond donc à chaque image I un $a \in I$ unique tel que (1) ait lieu. En définissant une relation d'ordre partiel $<$ par la condition $c < c'$ si $\mu(c') = c$, il résulte que $a = c_I$ est au moins aussi simple que toute autre configuration de I ; on a ainsi défini un ordre partiel et une propriété de treillis sur C .

Un cas particulier de réduction est le suivant :

Soit C un semi-groupe commutatif de configurations libres et soient c et c' deux configurations telles que chacune puisse être réduite à un signe unique, et que l'ensemble des signes communs à c et c' se réduise également à un signe unique ; s'il résulte, dans ces conditions, que la configuration consistant en tous les signes apparaissant en c ou c' se réduit à un seul signe, on dit que les signes de S sont collapsibles (ou repliables ou rabattables). Disons, à titre d'exemple, qu'une règle (éventuelle multivoque) de réduction consiste à rabattre les configurations le plus possible et à identifier deux configurations c et c' si elles se simplifient en une seule et même configuration ; c'est l'identification par les "composantes connectées au maximum".

b. Génération et décomposition des ensembles d'images et des images.

Si une image était décomposée (sous la loi de décomposition des images) en une somme d'images élémentaires, ce serait un principe de simplification que de vouloir l'identifier en procédant (lorsque c'est possible) composante par composante (*) : c'est le problème que nous allons examiner dans ce paragraphe.

Considérons, pour commencer, la génération d'ensembles d'images, en procédant par analogie avec les espaces vectoriels.

Définition 6.

Soit H un sous-ensemble de la grammaire image $\mathcal{J}$, $H \subset \mathcal{J}$, contenant des images $I_1, I_2, \ldots, I_n$:

$H = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$;

(*) On trouvera une étude mathématique, faite dans cet esprit, et des applications à la reconnaissance des caractères manuscrits dans J.R. ULLMANN (45) et (46).

on appelle ensemble engendré par H et on désigne par :

$$H^G = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}^G$$

l'ensemble des images de la forme $g_1 I_1 + g_2 I_2 + \ldots + g_n I_n$, où n est un entier arbitraire, $g_k \in G$, $I_k \in H$, $k = 1,2,\ldots,n$:

$$H^G = \{I_H \; ; \; I_H = g_1 I_1 + g_2 I_2 + \ldots + g_n I_n \; , \; \forall n \in \mathbb{N} \; , \; g_k \in G \; , \; I_k \in H \; ,$$

$$k = 1,2,\ldots,n \; \} \; .$$

Il est l'ensemble génératif de H^G .

$\mathcal{J}$ étant un manoïde non forcément commutatif, H^G est engendré par n'importe quelle combinaison linéaire des $I_1, I_2, \ldots, I_n$: on écrirait plus précisément $I_H = g_1 I_{k_1} + g_2 I_{k_2} + \ldots + g_n I_{k_n} \in H^G$, $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Nous nous intéresserons particulièrement, lors de l'identification composante par composante, au cas où $I_k = I_{\sigma_k} = S^G_\sigma$, c'est à dire où I_k est lui-même engendré par tous les signes d'un certain type σ_k .

Définition 7.

La dimension de la grammaire image $\mathcal{J}$, que l'on notera $\mathrm{Dim}(\mathcal{J})$, est le plus petit entier n tel qu'il existe des images $I_1, I_2, \ldots, I_n$, $H = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, pour lesquelles $\mathcal{J} = H^G$.

Si un tel n n'existe pas, on dit que la dimension de $\mathcal{J}$ est infinie. L'ensemble $H = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ s'appelle une base de $\mathcal{J}$ (*).

(*) Dans les espaces vectoriels, on définit d'habitude d'abord, l'indépendance linéaire, ensuite la base, enfin la dimension. Pour ce faire, on montre que tout vecteur de $\mathcal{J}$ admet une décomposition unique en fonction des vecteurs d'une base. Cela n'est pas possible ici puisque $\mathcal{J}$ n'est pas un groupe.

Définition 8.

Les images $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont dites être indépendantes s'il n'existe pas d'entier $m < n$ tel que l'on puisse trouver un ensenble $H' = \{I'_1, I'_2, \ldots, I'_m\}$ pour lequel $H = H'^G$, où $H = \{I_1, \ldots, I_n\}$. Un ensemble $H = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ est dit être minimal, s'il ne possède pas de sous-ensemble propre $K \subsetneq H$ tel que $H = K^G$.

Une base est toujours constituée d'images indépendantes.

Donnons maintenant un critère de minimalité d'un sous-ensemble, dans le cas où $I_k = I_{\sigma_k} = S^G_\sigma$, c'est à dire dans le cas où I_k est lui-même obtenu à partir de la totalité des signes d'un certain type σ_k.

Théorème 3.

Une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble $H_\sigma = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ de la grammaire image $\mathcal{J}$ soit minimal, est que les images non nulles I_ν, $\nu = 1,2,\ldots,n$ appartiennent à des sous-ensembles $\mathcal{J}_{\sigma_\nu}$ où tous les σ_ν sont des types différents.

Démonstration.

Il faut montrer que $H_\sigma = \{I_{\sigma_1}, \ldots, I_{\sigma_n}\}$, $I_{\sigma_k} \neq \emptyset$, $\forall k$, $\sigma_j \cap \sigma_k = \emptyset$ si $j \neq k$, ne possède pas de sous-ensemble propre H'_σ tel que $H = H'^G_\sigma$. Supposons le contraire, et soit $H' = \{I_{\sigma_{k_1}}, I_{\sigma_{k_2}}, \ldots, I_{\sigma_{k_m}}\}$, $m < n$, un sous-ensemble de H tel que :

$$I_{\sigma_1} = g_{11} I_{\sigma_{k_1}} + g_{12} I_{\sigma_{k_2}} + \ldots + g_{1m} I_{\sigma_{k_m}} ,$$

$$I_{\sigma_2} = g_{21} I_{\sigma_{k_1}} + g_{22} I_{\sigma_{k_2}} + \ldots + g_{2m} I_{\sigma_{k_m}} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_{\sigma_n} = g_{n1} I_{\sigma_{k_1}} + g_{n2} I_{\sigma_{k_2}} + \ldots + g_{nm} I_{\sigma_{k_m}} .$$

Si l'on représente les I_{σ_ν} et les $I_{\sigma_{k_\mu}}$ par des configurations, et si l'on remplace les égalités par la relation d'identification R, on aura :

$$c_{\sigma_1} \; R(g_{11}\, c_{\sigma_{k_1}} + g_{12}\, c_{\sigma_{k_2}} + \ldots + g_{1m}\, c_{\sigma_{k_m}}) \quad ,$$

$$c_{\sigma_2} \; R(g_{21}\, c_{\sigma_{k_1}} + g_{22}\, c_{\sigma_{k_2}} + \ldots + g_{2m}\, c_{\sigma_{k_m}}) \quad ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{\sigma_n} \; R(g_{n1}\, c_{\sigma_{k_1}} + g_{n2}\, c_{\sigma_{k_2}} + \ldots + g_{nm}\, c_{\sigma_{k_m}}) \quad .$$

Il résulte, en vertu de la propriété (iv) du Postulat 3 sur l'identification, que $c_{\sigma_{k_1}}$, $c_{\sigma_{k_2}}$, ..., $c_{\sigma_{k_m}}$ ont au moins un σ_{k_j} en commun respectivement avec c_{σ_1}, avec c_{σ_2}, ..., avec c_{σ_n}. Cela ne peut être possible que si $m = n$. Il s'ensuit que H_σ est bien un ensemble minimal.

Passons maintenant à la <u>décomposition des images</u>. Nous nous placerons <u>dans le cadre restrictif des grammaires images libres commutatives</u> (ce qui a lieu par exemple, lorsque la loi de composition des images est la superposition).

<u>Théorème 4</u>.

Si la grammaire image $\mathcal{J}$ est commutative, les images I peuvent être décomposées en parties I_σ formées chacune des signes d'un seul type :

$$I = I_{\sigma_1} + I_{\sigma_2} + \ldots + I_{\sigma_m} \quad ;$$

c'est une <u>décomposition en images types</u> ; elle n'est pas unique.

<u>Démonstration</u>.

Soit $\mathcal{J}$ une grammaire libre commutative et C la grammaire correspondante de configurations. Considérons le sous-ensemble $C_\sigma \subset C$ de configurations libres constituées de signes de type σ ; après identification C_σ deviendra un sous-ensemble $\mathcal{J}_\sigma \subset \mathcal{J}$. Comme C_σ est un sous-semi-groupe

commutatif, il en est de même pour $\mathcal{J}_\sigma$. Toute configuration libre $c \in C$ peut être décomposée en configurations c_σ formées de signes d'un même type. On peut écrire, en vertu de la commutativité dans C_σ :

$$c = (s_1(\sigma_{i_1}),\ldots,s_n(\sigma_{i_m})) \ , \ \{i_1,\ldots,i_m\} \subset \{1,\ldots,m\} \ ;$$

$$c = \underbrace{\left((s_{j_1}(\sigma_1),\ldots,s_{j_p}(\sigma_1)\right) \ ,\ldots,\left(\sigma_{k_1}(\sigma_m),\ldots,s_{k_g}(\sigma_m)\right)}_{n}$$

$$= c_1(\sigma_1) + \ldots + c_m(\sigma_m) \ .$$

En passant par identification aux images, on aura :

$$I = I_{\sigma_1} + \ldots + I_{\sigma_m}$$

Certains I_σ peuvent être l'image nulle E . Nous avons ainsi une décomposition de l'image originelle I comme somme de ses parties types. Comme l'on part de l'image I , et que l'on passe par la configuration c avant de retourner aux images I_σ , la décomposition n'est pas forcément unique, elle dépend de la configuration c .

Ce qui est intéressant et ce que l'on recherche - en théorie et en pratique - c'est de disposer de décompositions uniques. L'unicité de la décomposition sera donnée par des conditions supplémentaires. Nous avons alors les deux théorèmes qui suivent.

Théorème 5.

Soit une grammaire libre et commutative C de configurations. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une règle d'identification R définie sur C et une décomposition de la grammaire image correspondante $\mathcal{J}$ en un produit direct $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\sigma_1} + \mathcal{J}_{\sigma_2} + \ldots + \mathcal{J}_{\sigma_m}$,

où les images types $I_\sigma(c)$ sont déterminées de façon unique, est qu'il existe des règles d'identification R_σ dans C_σ pour tout $\sigma \in \Sigma$; on pose cRc' si et seulement si $c_\sigma R_\sigma c'_\sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Démonstration.

La condition est suffisante.

Si R est défini comme ci-dessus sur C , cRc' signifie que l'on a $c_\sigma R_\sigma c'_\sigma$, $\forall \sigma \in \Sigma$. En vertu de la condition (i) du Postulat 2 et du fait que C est libre, on a, $\forall g \in G$, $gc_\sigma R_\sigma gc'_\sigma$, $\forall \sigma \in \Sigma$, ce qui implique gcRgc' , c'est à dire la condition (i) du Postulat 3. Vérifions la condition (ii) du même Postulat 3 : on a par hypothèse $c = c_1 + c_2$, $c'_1 + c'_2$, $c_1 R c'_1$, $c_2 R c'_2$; la règle R étant définie comme ci-dessus, il en résulte que $c_{1\sigma} R\, c'_{1\sigma}$, $c_{2\sigma} R\, c'_{2\sigma}$, $\forall \sigma \in \Sigma$. Mais alors, $\forall \sigma \in \Sigma$, c_σ $(= c_{1\sigma} + c_{2\sigma})$ $R_\sigma c'_\sigma$ $(= c'_{1\sigma} + c'_{2\sigma})$ ce qui implique cRc' . En ce qui concerne la condition (iii) : R est réflexive puisque cRc' signifie que l'on a $c_\sigma R_\sigma c'_\sigma$, et que R_σ l'est ; R est symétrique puisque $c_\sigma R_\sigma c'_\sigma$ implique, en vertu de la symétrie de R_σ , $c'_\sigma R_\sigma c_\sigma$, donc cRc' implique c'Rc ; enfin, et de la même façon, R_σ est transitive puisque R l'est. Finalement, la condition (iv) du Postulat 3 résulte pour R de la façon dont on a introduit R_σ : si aucun type de c n'est égal à aucun type de c' , alors $c_\sigma \not R_\sigma c'_\sigma$, $\forall \sigma \in \Sigma$, d'où $c \not R c$, ou bien $c = c' = \emptyset$.

Remarquons que les règles d'identification R_σ ne sont tenues à vérifier que les conditions (i),(ii) et (iii) du Postulat 3 sur l'identification.

R est donc une relation d'identification sur C et définit la grammaire image $\mathcal{J}$ libre et commutative comme C . Le fait d'avoir des règles d'identification différentes pour les c_σ et pour c , ne rompt pas l'égalité $I = I_{\sigma_1}(c) + \ldots + I_{\sigma_m}(c)$, si bien qu'en passant des configurations aux images on a toujours $I = I_{\sigma_1} + \ldots + I_{\sigma_m}$. Si cRc' , alors $c_\sigma R_\sigma c'_\sigma$, $\forall \sigma \in \Sigma$, donc si c et c' appartiennent à la même image I , alors c_σ et c'_σ appartiendront à la même sous-image I_σ : si $I(c) = I(c')$ alors $I_\sigma(c) = I_\sigma(c')$. Les images types sont ainsi définies de façon unique.

La condition est nécessaire.

Il suffit de considérer les images $I = I_\sigma$, ou encore de dire que si c est identifié à c' , leurs images types le sont également, soit $I_\sigma(c) = I_\sigma(c')$, $\forall \sigma \in \Sigma$, ce qui peut être pris comme définition de R_σ .

Le critère suivant est un corollaire du théorème précédent et impose un autre type de conditions à $\mathcal{J}$.

Théorème 6.

Si la grammaire libre commutative $\mathcal{J}$ forme un groupe qui admet les $\mathcal{J}_\sigma$ comme sous-groupes pour la loi de composition des images, les images types sont déterminées de façon unique.

Démonstration.

Soient c et c' deux configurations identifiables cRc' :

$$\begin{cases} c = c_{\sigma_1} + c_{\sigma_2} + \dots \\ c' = c'_{\sigma_1} + c'_{\sigma_2} + \dots \end{cases},$$

où certaines composantes c_σ peuvent être vides. Soient $c_\sigma \in I_{\sigma_1}, c'_{\sigma_1} \in I'_{\sigma_1}$, ..., alors en passant des configurations aux images et comme cRc' , on a : $I = I_{\sigma_1} + I_{\sigma_2} + \dots$, $I' = I'_{\sigma_1} + I'_{\sigma_2} + \dots$, et $I = I'$ puisque $c_{\sigma_j} R_{\sigma_j} c'_{\sigma_j}$, $\forall j$. Il en résulte :

$$I_{\sigma_1} + I_{\sigma_2} + \dots = I'_{\sigma_1} + I'_{\sigma_2} + \dots$$

Les sous-semi-groupes I_{σ_j} sont des sous-groupes puisque ce sont des sous-ensembles du groupe $\mathcal{J}$, stables pour l'addition des images ; en utilisant l'inverse " - " de l'opération de groupe on obtient :

$$I_{\sigma_1} - I'_{\sigma_1} = I'_{\sigma_2} - I_{\sigma_2} + \dots$$

Le membre gauche ne contient que des types σ_1 , alors que le membre droit ne contient que des types $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$, soient $c_G \in C_{\sigma_1}$ et $c_D \in C_{\sigma_2} + C_{\sigma_3} + \ldots$ des configurations de la partie gauche, respectivement droite de l'égalité ci-dessus. Elles sont identifiées ; en vertu de la condition (iv) du Postulat 3 sur l'identification elles doivent être vides, si bien que $I_{\sigma_1} = I'_{\sigma_1}$, etc...

Il est évident que ce qui est essentiel sur le plan pratique est une bonne paramétrisation des images. Ainsi le bon choix des types σ est fondamental et le coût de la reconnaissance en dépend directement.

1.3. Structures (pures)

Comme il est habituel, les structures ne retiendront que les quelques propriétés fondamentales qui suffisent à caractériser un ensemble d'objets, en l'occurence des images. La notion d'image, que nous avons définie en 1.2., est une formalisation de la manière dont le sujet reçoit et organise subjectivement ses perceptions(*) : une image est un ensemble dans lequel l'observateur a mis toutes les configurations qu'il a identifiées (peut être d'ailleurs d'une façon erronée). Deux images différentes peuvent véhiculer la même signification ; la structure ne veut retenir que cette signification en éliminant la redondance et en ne gardant que des propriétés générales, comme par exemple les différents types qui constituent l'image ou (et) les différentes transformations g qui ont été utilisées pour passer des sihouettes aux signes. Notre formalisme nous a, en somme, menés à un ensemble $\mathcal{J}$ d'images ; ce sont elles que l'on observe effectivement et que l'on doit classer en structures.

On pose alors la

(*) Nous ne parlons pas ici de la distorsion introduite dans les images par le bruit, il en sera question dans le chapitre 2.

Définition 9.

On entend par structures(pures) une famille $\mathcal{P}$ de sous-ensembles $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n, \ldots$ disjoints et stables par G d'une grammaire image $\mathcal{J}$. La stabilité par G est entendue : $g(s_1, \ldots, s_n) = (gs_1, \ldots, gs_n)$.

Remarquons que la famille $\mathcal{P}$ ne recouvre pas $\mathcal{J}$ et que deux images semblables (cf. 1.2., Définition 5) appartiennent à la même structure, c'est à dire ont la même signification.

Problème de la reconnaissance des structures (pures) :

Trouver une application (ou fonction de reconnaissance) de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{P}$ qui classe l'image $I \in \mathcal{J}$ suivant la structure $\mathcal{P}_j \in \mathcal{P}$ (s'il en existe une) à laquelle elle appartient.

Définition 10.

Soit T un ensemble de transformations t appliquant $\mathcal{J}$ en lui-même ; le prototype I_ν d'une structure $\mathcal{P}_\nu$ est une image telle que tI_ν parcourt une fois et une seule tous les éléments de $\mathcal{P}_\nu$ lorsque t parcourt $T(T\mathcal{J}_\nu = P_\nu)$.

Le prototype joue, pour la structure, le rôle de la silhouette pour le signe.

T doit contenir le groupe G des transformations de similitude, mais n'est pas obligatoirement un groupe. Lorsque T = G et lorsque l'on peut trouver dans chaque structure un prototype, le classement de l'image I donnée et de structure inconnue consiste simplement en l'analyse unique $I = gI_\nu$. Dans ce cas particulier et important, on écrit $\mathcal{P} = \mathcal{J}/G$.

Définition 11.

Les images appartenant à une même structure $\mathcal{P}_\nu$ s'appellent des images synonymes. On écrit encore $I_1 \equiv I_2(\mathcal{P})$.

S'il existe un prototype I_ν , on a $I_1 = t_1 I_\nu$, $I_2 = t_2' I_\nu$, c'est à dire $I_1 = tI_2$ avec $t_1, t_2, t \in T$.

Il résulte des Définitions 10 et 11 que lorsque $\mathcal{T} = \mathcal{Y}/G$, c'est à dire lorsque $T = G$, la synonymie se réduit à une similitude.

Définition 12.

On appelle sondage une fonction f , définie dans $\mathcal{Y}$, et telle que si I_1 et I_2 sont synonymes, alors $f(I_1) = f(I_2)$ (*). Un ensemble $F = \{f\}$ de sondages est appelé complet s'il sépare les structures : $f(I_1) = f(I_2)$, $\forall f \in F$, implique que I_1 et I_2 sont synonymes.

Si, enfin, l'on peut analyser l'image à partir de ses composantes types, c'est à dire, si l'on peut décomposer I en

$$I = I_1 + I_2 + \ldots$$

et que la reconnaissance $I_\nu \in \mathcal{T}_\nu$ permette d'en déduire la structure de I , on aura segmenté le problème.

L'ensemble

$$\mathcal{G} = (S, \mathcal{Y}, G, \mathcal{T})$$

s'appellera une grammaire de structures (pures).

(*) Un sondage sélectionne donc un des traits caractéristiques ; il permet de dire que deux images appartiennent à la même structure, sans préciser obligatoirement laquelle.
On trouve par exemple dans J.E. RUBIO (41) un modèle mathématique de l'espace des numéraux manuscrits, espace qui est représenté par un sous-espace de $L^2(0,1)$. Les sondages sont, dans ce modèle, des opérateurs intégraux à noyaux dépendant de fonctions, dont les projections sont maximales et égales sur chaque image appartenant à une structure, et nulles sur toutes les autres. Ces fonctions sont déterminées par des méthodes variationnelles.

CHAPITRE 2

GRAMMAIRES DE STRUCTURES DEFORMEES.

Les images de la vie réelle peuvent rarement être décrites à l'aide d'une simple grammaire de structures pures. Ce sont des structures déformées qui se présentent à l'observation. On a donc d'un côté des structures pures, qui sont des données (elles ont pu être obtenues à la suite à la fois d'observations portant sur une grande quantité d'images réelles - d'où une image moyenne, une photo robot - et à la fois d'un processus d'abstraction), et d'un autre côté des images observables qui sont des images ayant une structure déformée. Or, il s'agit, d'une part, d'analyser ce mécanisme de déformation, c'est à dire d'analyser les transformations permettant de passer d'une image pure à une image déformée, d'autre part de reconnaître une image déformée, autrement dit de lui attribuer une structure (évidemment pure puisque ce sont les structures pures que l'on veut reconnaître, par exemple la lettre A sous ses multiples déformations) avec le maximum de vraisemblance.

Reprenons le 1er problème, celui des mécanismes de déformation. Si l'on désigne par $I^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ respectivement une image et l'ensemble des images déformées, on passera de $I \in \mathcal{I}$ à $I^{\mathcal{D}} \in \mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ par une transformation d appartenant à un ensemble de transformations $\mathcal{D}$ ($I^{\mathcal{D}} = dI$, $d \in \mathcal{D}$) . Or, comme nous l'avons dit, I peut être une donnée (par exemple un prototype de la structure pure) et $I^{\mathcal{D}}$ résulte d'une observation donc est également connue. Par contre d n'est pas connu. Mais il n'empêche que l'on peut avoir sur $\mathcal{D}$ un certain nombre d'informations : ce peut être d'abord les déformations d'un type particulier, non toutes les déformations possibles. Ensuite l'observation d'un grand nombre d'images $I^{\mathcal{D}}$ permet, en tous cas statistiquement, de les circonscrire globalement, c'est à dire d'en préciser les diverses modalités possibles (certaines distorsions, donc certaines déformations topologiques - s'il s'agit de figures géométriques - certains types de bavures ou de coupures). On n'est donc pas totalement démuni et l'on a des renseignements sur $\mathcal{D}$, permettant de faire à son sujet un certain

nombre d'hypothèses et de lui conférer certaines propriétés, ou en tous cas certaine structure (mathématique). Du point de vue de l'analyse et de l'étude mathématique des structures déformées, c'est une attitude que l'on peut adopter : on se donnera $\mathcal{D}$ (*) .

Passons au 2ème problème, celui de la reconnaissance. Il s'agit alors d'associer $I^{\mathcal{D}}$ à $\mathcal{P}_\gamma$. On est ainsi amené à mesurer la proximité de $I^{\mathcal{D}}$ avec un prototype de $\mathcal{P}_\gamma$ ou avec un certain nombre ou tous les exemplaires de $\mathcal{P}_\gamma$ (on dit quelque fois que $\mathcal{Y}$ représente un espace de paramètres, et $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ l'espace des échantillons).

Remarquons qu'en général $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ si $\mathcal{D}$ contient par exemple la transformation identité et que l'on peut se placer dans l'espace des images déformées. Là on imagine facilement que l'on puisse mesurer la proximité de 2 images. Il suffit d'abord de métriser l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$, et de mesurer l'écart entre 2 images (convenablement centrées et orientées) avec une distance appropriée. On peut aussi introduire une distance sur $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ à l'aide d'une fonction d'effort sur $\mathcal{D}$. Cette fonction peut avoir le sens de l'énergie (physique) qu'il faudrait développer pour transformer une image (par exemple métallisée) en une autre. En ce qui concerne l'approche probabiliste, on pourra de même se donner une distribution de probabilité sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des déformations.

Ce chapitre se divisera en 3 paragraphes : un premier, général, sur les grammaires de déformation, dans lequel, en particulier, on introduira diverses propriétés relatives aux déformations et divers types d'invariance des fonctions de reconnaissance ; un second sur les grammaires métriques de déformation ; et un dernier sur les grammaires probabilistes de déformation.

2.1. Grammaires de déformation.

Nous définirons dans ce paragraphe les déformations et leurs rapports avec les lois de compositions déjà définies dans l'ensemble des images.

(*) On peut s'intéresser à des déformations qui conservent des propriétés locales d'invariance, ou à des déformations qui conservent des propriétés globales, comme par exemple dans le cas des caractères alphanumériques, celle d'être une courbe fermée, ou simple, ou convexe.

Définition 1.

On appelle grammaire de structures déformées ou grammaire de déformation et on désigne par $\mathcal{G}_{def}$ le triplet

$$\mathcal{G}_{def} = (\mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{I}\mathcal{D}) \quad , \qquad (1)$$

où : $\mathcal{G}$ est une grammaire donnée de structures pures $\mathcal{G} = (S, G, \mathcal{I}, \mathcal{P})$; $\mathcal{D}$ est un domaine donné d'applications d, appelées déformations, définies sur $\mathcal{I}$; $\mathcal{I}\mathcal{D}$ est l'ensemble dont les éléments, appelés images déformées, sont obtenus en appliquant les déformations $d \in \mathcal{D}$ aux images pures $I \in \mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}\mathcal{D} = \{dI \; ; \; d \in \mathcal{D} \; , \; I \in \mathcal{D}\} \; ;$$

on écrira encore $dI = I^{\mathcal{D}}$.

Remarques

1. Les déformations peuvent se situer tant au niveau du signe qu'au niveau de la phrase. Dans le premier cas, chaque signe est déformé indépendamment des autres, sans modification de la structure grammaticale de l'image ; dans le second, il peut y avoir addition de signes parasites, suppression de signes, et enfin altération de la loi de composition. Toutes ces déformations ne peuvent pas être répercutées sur les déformations subies par chaque signe, si bien que l'on ne peut pas écrire

$$dI = d(s_1+s_2+\ldots+s_n) = d_1 s_1 + d_2 s_2 + \ldots + d_n s_n \; ; \; d, d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D} \quad ,$$

mais que l'on devrait écrire en toute rigueur

$$dI = c_o'^{\mathcal{D}} + d_1 s_1 + c_1'^{\mathcal{D}} + d_2 s_2 + c_2'^{\mathcal{D}} + \ldots + d_n s_n + c_n'^{\mathcal{D}} + c'^{\mathcal{D}} \quad ,$$

où $+$ est la loi de composition altérée, chacun des symboles pouvant être déformé d'une façon différente. Devant l'extrême complexité de cette formulation, on a tendance à donner une définition globale de la déformation de l'image : c'est ce que nous avons fait dans la Définition 1. Mais il est évident que par la suite, on sera amené à simplifier le problème, en suppo-

sant en particulier qu'il n'y a pas d'altération de la loi de composition, ou que cette altération peut facilement être répercutée sur les déformations subies par chaque signe.

2. Remarquons alors que d est néanmoins défini par un signe $(I = s)$, mais que la connaissance de la valeur de ds par toutes les déformations $d \in \mathfrak{D}$ ne donne pas, en général, la valeur de dI, pour tous les $I \in \mathcal{J}$, puisque nous ne connaissons pas le comportement des déformations d par rapport aux lois de composition des signes.

3. Si $\mathfrak{D}$ contient la transformation identité, on déduit l'inclusion $\mathcal{J}^{\mathfrak{D}} \supset \mathcal{J}$. On désignera dans ce cas respectivement par les mêmes symboles d, g, et $+$ les prolongements des applications d et des lois de composition g et $+$, définis sur $\mathcal{J}$, à $\mathcal{J}^{\mathfrak{D}}$. On aura ainsi défini les lois de composition $I_1^{\mathfrak{D}} + I_2^{\mathfrak{D}}$ et $gI^{\mathfrak{D}}$, $g \in G$, $I_1^{\mathfrak{D}}, I_2 \in \mathcal{J}^{\mathfrak{D}}$, en remarquant toutefois qu'en général $I_1^{\mathfrak{D}} + I_2^{\mathfrak{D}} \neq (I_1+I_2)^{\mathfrak{D}}$ et que $gI^{\mathfrak{D}} \neq dgI = (gI)^{\mathfrak{D}}$ (voir remarques précédentes). L'élément unité de $\mathcal{J}^{\mathfrak{D}}$ par rapport à $+$ sera toujours l'image E qui contient la suite vide $\emptyset$.

Définition 2.

On appelle structures déformées une famille $\mathcal{P}^{\mathfrak{D}}$ de sous-ensembles $\mathcal{P}_1^{\mathfrak{D}}, \mathcal{P}_2^{\mathfrak{D}}, \ldots, \mathcal{P}_n^{\mathfrak{D}}, \ldots$ disjoints et stables par G de $\mathcal{J}^{\mathfrak{D}}$.

Définition 3.

Si $\mathfrak{D}$ contient la transformation identité, les déformations $d \in \mathfrak{D}$ s'appellent :

(i) covariantes si $gd = dg$ a lieu identiquement (commutativité des déformations avec les similitudes des images) ;

(ii) homomorphes si $d(I_1+I_2) = dI_1 + dI_2$ a lieu identiquement (distributivité des déformations par rapport à la composition des images).

Il résulte dans ces conditions que :

1. Lorsque les déformations sont homomorphes, il suffit de les définir par les signes pour qu'elles soient définies pour les images (si $c = (s_1,\ldots,s_n)$, alors $dc = (ds_1,\ldots,ds_n)$) .

2. Lorsque les déformations d sont covariantes et homomorphes, il suffit de les définir pour les silhouettes pour qu'elles soient définies pour les images (si $s_1 = g_1m_1,\ldots,s_n = g_nm_n$ et $c = (s_1,\ldots,s_n)$ alors $dc = (g_1dm_1,\ldots,g_ndm_n)$.

3. Lorsque les déformations d sont covariantes et homomorphes, elles réalisent des homomorphismes des deux structures algébriques homologues $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$.

En effet, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ sont des structures algébriques homologues (cf. Remarque 3) et de plus on a :

$$(gI)^{\mathcal{D}} = d(gI) = \{dgc \ ; \ dgc = dg(s_1,\ldots,s_n) = d(gs_1,\ldots,gs_n) = (gds_1,\ldots,gdsn)$$
$$= g(dc)\} = gI^{\mathcal{D}}$$

et

$$(I_1+I_2) = d(I_1+I_2) = \{d(c_1+c_2) \ ; \ d(c_1+c_2) = d(s_1,\ldots,s_n,s'_1,\ldots,s'_n,)$$
$$= (ds_1,\ldots,ds_n,ds'_1,\ldots,ds'_n,) = \{(s_1,\ldots,s_n)^{\mathcal{D}},(s'_1,\ldots,s'_n,)^{\mathcal{D}}\}\}$$
$$= I_1^{\mathcal{D}} + I_2^{\mathcal{D}} \ .$$

$\mathcal{Y}^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}\,\mathcal{Y}$ est alors un semi-groupe à opérateurs $g \in G$, avec élément unité pour la loi de composition interne, donc un monoïde à opérateurs ; la distributivité $g(I_1^{\mathcal{D}} + I_2^{\mathcal{D}}) = gI_1^{\mathcal{D}} + gI_2^{\mathcal{D}}$ a lieu, ainsi que l'associativité $g_1(g_2I^{\mathcal{D}}) = (g_1g_2)I^{\mathcal{D}}$: $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ est une grammaire image (déformée).

Le problème de la reconnaissance des structures déformées consistera à trouver une application de $\mathcal{J}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{P}$:

$$\alpha : \mathcal{J}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{P} ,$$

appelée fonction de reconnaissance.

On sait que deux images pures semblables (provenant d'un même prototype I) sont classées dans une même structure ; les images déformées (par une même déformation) qui leur correspondent sont ou ne sont pas semblables : on s'intéressera aux fonctions de reconnaissance qui les classent dans la même structure $(\alpha(dgI) = \alpha(dI))$. On s'intéressera par ailleurs aux fonctions de reconnaissance qui classent dans la même structure les images déformées semblables $(\alpha(gI^{\mathcal{D}}) = \alpha(I^{\mathcal{D}}))$. En supposant que $\mathcal{D}$ contienne la transformation identité, on posera alors la

Définition 4.

Une fonction de reconnaissance $\alpha : \mathcal{J}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{P}$ est dite

(i) invariante $(\mathcal{P})$ si $I_1 \equiv I_2 \pmod G$ entraine $\alpha(dI_1) = \alpha(dI_2)$, $\forall I_1, I_2 \in \mathcal{J}$, $\forall d \in \mathcal{D}$, ou encore si

$$\alpha(dI) = \alpha(dgI) \quad . \tag{2}$$

(ii) invariante (G) si $I_1^{\mathcal{D}} \equiv I_2^{\mathcal{D}} \pmod G$ entraine $\alpha(I_1^{\mathcal{D}}) = \alpha(I_2^{\mathcal{D}})$, $\forall I_1^{\mathcal{D}}$, $I_2^{\mathcal{D}} \in \mathcal{J}^{\mathcal{D}}$, ou encore si

$$\alpha(dI) = \alpha(gdI) \quad . \tag{3}$$

Donnons les théorèmes d'équivalence.

Théorème 1.

Si $\mathcal{D}$ contient la transformation identité et si les déformations $d \in \mathcal{D}$ sont covariantes, l'invariance (G) de la fonction de reconnaissance α est équivalente à l'invariance $(\mathcal{P})$.

Démonstration

Si α est invariante $(\mathcal{P})$ on a $\alpha d = \alpha dg$, et si d est covariante on a $\alpha d = \alpha dg = \alpha gd$, donc α est invariante (G). La réciproque se démontre de la même façon.

Ce résultat n'est pas très utile puisqu'il suppose, restrictivement, que les déformations sont covariantes. On obtient un résultat plus utile grâce au théorème suivant qui, de plus, précise par quel type de déformations on peut passer de l'ensemble des structures $\mathcal{P} = \mathcal{J}/G$ à l'ensemble des structures $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \mathcal{J}^{\mathcal{D}}/G$.

Théorème 2.

Si $\mathcal{D}$ est un groupe contenant G comme sous-groupe normal(*), alors :

(i) l'invariance $(\mathcal{P})$ est équivalente à l'invariance (G) ;

(ii) la famille de structures $\mathcal{P} = \mathcal{J}/G$ est appliquée par les déformations du groupe quotient $\mathcal{D}/G = F$ dans la famille de structures déformées $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \mathcal{J}^{\mathcal{D}}/G$.

Démonstration.

(i) $\mathcal{D}$ contenant G comme sous-groupe normal, il existe, pour une image arbitraire $I \in \mathcal{J}$, pour une déformation arbitraire $d \in \mathcal{D}$, et pour une transformation de similitude arbitraire $g \in G$, une transformation de similitude $h \in G$ telle que $dh = gd$. Il résulte que, si α est invariante $(\mathcal{P})$ on a :

$$\alpha(gdI) = \alpha(dhI) = \alpha(dI) ,$$

ce qui montre que α est invariante (G). La réciproque se monte de la même façon.

(*) Un sous-groupe A d'un groupe X est dit normal si et seulement si $xax^{-1} \in A$, $\forall a \in A$, $\forall x \in X$; une condition nécessaire et suffisante pour que A soit un sous-groupe normal de X est que $xA = Ax$ pour tout $x \in X$.

(ii) Soient deux images pures semblables I_1, I_2 appartenant à une structure $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{P} = \mathcal{I}/G$; on a alors $I_1 = g_1 I$, $I_2 = g_2 I$, où I est un prototype de $\mathcal{P}_1$ et $g_1, g_2 \in G$. L'élément $h = dg_1 (dg_2)^{-1} \in G$ puisque G est normal(*). On a par conséquent $I_1^{\mathcal{D}} = dI_1 = dg_1 I = hdg_2 I = hdI_2 = hI_2^{\mathcal{D}}$ si bien que $I_1^{\mathcal{D}} = hI_2^{\mathcal{D}}$ avec $h \in G$, c'est à dire $I_1 \equiv I_2 \pmod G$; ces deux images déformées appartiennent à la même structure déformée $\mathcal{P}_1^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}\mathcal{P}_1 \in \mathcal{I}^{\mathcal{D}}/G$. La valeur de la fonction $d : \mathcal{P} \to d\mathcal{P} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ dépend uniquement de la classe d'équivalence $f \in F$ modulo G à laquelle appartient d , puisque l'on passe de $I_1^{\mathcal{D}}$ à $I_2^{\mathcal{D}}$ par h , qui est défini par $dg_1 = hdg_2$ exprimant que $dg_1 \equiv dg_2 (G)$.

D'une façon générale, les deux invariances $(\mathcal{P})$ et (G) n'ont pas de raison de coïncider. Donnons en un exemple.

Application 1.

Soit une structure de contraste (cf. chapitre 3, paragraphe 5) avec pour espace d'arrière plan X l'ensemble $\mathbb{Q}$ des entiers, et pour espace de contraste C , l'ensemble des réels $C = \mathbb{R}^1$. Les images seront constituées

---

(*) Le sous-groupe normal G du groupe $\mathcal{D}$ définit un groupe quotient $F = \mathcal{D}/G$, les éléments de F sont les classes d'équivalence de G dans $\mathcal{D}$ de la forme $(f) = xG$, $x \in \mathcal{D}$, respectivement Gx , $x \in \mathcal{D}$, où $xG = \{xg \; ; \; g \in G\}$. L'opération binaire dans l'espace quotient $F = \mathcal{D}/G$ des classes d'équivalence (à gauche) de G dans $\mathcal{D}$ est définie par $(xG)(yG) = (xy)G$ et définit une structure de groupe sur $\mathcal{D}/G = F$. En l'occurence, les fonctions $f \in F$ sont de la forme $f = dG = \{dg \; ; \; g \in G\}$; si dg_1 et dg_2 appartiennent à la même classe, d'équivalence de $F = \mathcal{D}/G$, on a $dg_1 \equiv dg_2 \pmod G$, qui peut encore s'écrire $dg_1 = hdg_2$, $h = dg_1 (dg_2)^{-1} \in G$.

de suites de nombres réels (les signes) $\{I = \{s(x)\}$; $x = \ldots,-1,0,1,\ldots\}$. Nous supposerons que les signes prennent des valeurs différentes de 0 pour un nombre fini de valeurs de x. Nous prendrons pour transformation de synonymie les translations $s(x) \to s(x+g)$, et définirons les signes déformés $s^{\mathcal{D}}(x)$ par la relation $ds(x) = d(x)\, s(x)$, où les déformations $d(x)$ forment des suites réelles, et de même les images déformées $I^{\mathcal{D}}$ par $dI = \{d(x)\, s(x)\}$. Prenons alors pour fonction de reconnaissance $\alpha(I) = \sum_x s(x)$. Cette fonction de reconnaissance est invariante (G), mais non invariante ($\mathcal{P}$), puisqu'en effet :

$$\alpha(dI) = \sum_x d(x)\, s(x) \quad ,$$

$$\alpha(gdI) = \sum_x d(x+g)\, s(x+g) = \sum_x d(x)\, s(x) = \alpha(dI) \quad ,$$

$$\alpha(gI) = \sum_x s(x+g) \quad ,$$

$$\alpha(dgI) = \sum_x d(x)\, s(x+g) \neq \alpha(dI) \quad .$$

Remarque 4.

Les fonctions de reconnaissance, qu'elles soient invariantes (G) ou ($\mathcal{P}$), doivent répondre à certains critères. Ainsi, si $\alpha(I^{\mathcal{D}})$ est invariant (G), il doit être constant sur les sous-ensembles de $\mathcal{YD}$ constituées d'images déformées synonymes (en supposant que la synonymie se confond avec la similitude). En désignant ces sous-ensembles d'images synonymes par $\mathcal{YD}_\mu$, où μ est un indice (convenablement choisi), on aura à examiner si la partition $\mathcal{YD} = \bigcup_\mu \mathcal{YD}_\mu$ est suffisamment fine pour une fonction de reconnaissance α, autrement dit si à une finesse de la partition correspond une égale finesse, ou plutôt une égale sensibilité de la fonction de reconnaissance. Sinon, on devra sacrifier la propriété d'invariance (G). D'une façon analogue, si $\alpha(I^{\mathcal{D}})$ est invariant ($\mathcal{P}$), il doit être constant sur les sous-ensembles de $\mathcal{YD}$ constitués d'images déformées provenant d'images pures synonymes. On obtient ainsi une partition $\mathcal{YD} = \bigcup_\nu \mathcal{YD}_\nu$ (évidemment non forcément identique à la partition $\bigcup_\mu \mathcal{YD}_\mu$), mais on doit remarquer qu'elle provient

d'une partition initiale sur $\mathcal{I}$ (et n'est pas une partition obtenue directement sur $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ comme dans le cas de l'invariance (G)). Il se peut alors que les déformations soient de telle sorte que plusieurs structures (pures) engendrent le même sous-ensemble $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}_{\nu}$. C'est dans ce cas que l'on devra sacrifier la propriété d'invariance $(\mathcal{P})$: la finesse de la partition est ici en défaut.

2.2. Grammaires métriques de déformation.

Nous supposerons dans ce paragraphe $\mathcal{I}^{\mathcal{D}} > \mathcal{I}$.

Définition 5.

On appelle grammaire métrique de déformation, et on désigne par

$$\mathcal{G}_{met} = (\mathcal{G}_{def}, \delta) \qquad (4)$$

une grammaire de déformation $\mathcal{G}_{def} = (\mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{I}^{\mathcal{D}})$, où $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ est métrisé par une distance δ invariante par rapport au groupe G des similitudes.

Cette définition permettra d'introduire des fonctions de reconnaissance à distance minimum $\alpha : \mathcal{I}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{P}_{\nu} \in \mathcal{P} = \mathcal{I}/G$ satisfaisant la condition $\delta(I, I^{\mathcal{D}}) = \min$, où $I \in \mathcal{I}$ appartient à la structure $\mathcal{P}_{\nu}$. Ces fonctions de reconnaissance seront G-invariantes ; cela résulte de la façon même dont δ est défini. Nous n'examinerons pas le cas des fonctions de reconnaissance $\mathcal{P}$-invariantes avec $T \neq G$.

a. Distances invariantes

Définition 6.

Une fonction $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$, définie sur le produit cartésien $\mathcal{I}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ et à valeurs réelles, est une distance complètement invariante si :

(i) $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) \geq 0$; $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = 0$ si et seulement si

$I_1^{\mathcal{D}} \equiv I_2^{\mathcal{D}} \pmod{G}$;

(ii) δ est symétrique et satisfait l'inégalité du triangle :

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \delta(I_2^{\mathcal{D}}, I_1^{\mathcal{D}}) \quad ;$$

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}) \leq \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) + \delta(I_2^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}) \quad ;$$

(iii) $\delta(g_1 I_1^{\mathcal{D}}, g_2 I_2^{\mathcal{D}}) = \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$, $\forall g_1, g_2 \in G$ (complète invariance ($g_1 \neq g_2$) de la distance δ par rapport à la similitude).

Il sera commode quelquefois de supposer que δ prend ses valeurs dans l'intervalle $(0, +\infty)$ de la droite achevée $\overline{R}$.

La condition (iii) implique que $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$ dépend uniquement des structures de $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}/G$ qui contiennent les images déformées $I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}$; aussi δ peut être considéré comme étant une fonction Δ définie sur $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$. On a donc $\Delta : \mathcal{P}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}} \to \overline{R}$, $\Delta / \mathcal{Y}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{Y}^{\mathcal{D}} = \delta$. Les conditions (i) et (ii) définissent Δ comme étant une distance. La condition (i) définit Δ comme étant une fonction qui sépare les structures de $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$: Δ est un sondage dans $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$.

On peut avoir besoin d'une notion plus faible de métrique invariante :

Définition 7.

Une fonction $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$ définie sur le produit cartésien $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ et à valeurs réelles, est une distance (simplement) invariante si elle satisfait les conditions (i) et (ii) de la Définition 6 et si elle admet la condition plus restrictive que (iii) :

(iii') $\delta(gI_1^{\mathcal{D}}, gI_2^{\mathcal{D}}) = \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$, $\forall g \in G$ (invariance (simple) de la distance δ par rapport à la similitude lorsque le rapport de similitude est le même).

Remarquons qu'une distance invariante ne peut être considérée, en général, comme une distance définie sur $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ (ou sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$) comme cela était le cas pour les distances complètement invariantes.

Signalons enfin la possibilité de définir une distance non nécessairement symétrique par rapport à ses deux arguments, l'utilité s'en manifestant lorsque les couples ordonnés $(I, I^{\mathcal{D}})$, de l'image pure et de l'image déformée appartiennent à des grammaires images $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^{\mathcal{D}}$ différentes ($\mathcal{J} \neq \mathcal{J}^{\mathcal{D}}$).

b. Construction de distances invariantes.

1) Construction générale.

Nous allons d'abord mentionner une construction simple d'une distance complètement invariante, et d'une distance (simplement) invariante, connaissant une distance quelconque δ_o , définie sur $\mathcal{J}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{J}^{\mathcal{D}}$.

Soit donc δ_o une telle distance. On pose :

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \min_{g_1, g_2 \in G} \delta_o(g_1 I_1^{\mathcal{D}}, g_2 I_2^{\mathcal{D}}), \qquad (5)$$

où l'on admet que le minimum est atteint. Il est facile de vérifier, compte tenu du fait que δ_o est une distance et que G est un groupe, que δ satisfait aux conditions (i),(ii),(iii) de la Définition 6 : c'est une distance complètement invariante.

On aurait de même

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \min_{g \in G} \delta_o(gI_1^{\mathcal{D}}, gI_2^{\mathcal{D}}) \quad , \qquad (5')$$

δ étant alors une distance (simplement) invariante.

2) Construction à partir d'une fonction d'effort sur $\mathcal{D}$.

Définition 8.

Si $\mathcal{D}$ est un semi-groupe inversif(*) avec élément unité, contenant comme sous-groupe le groupe G des similitudes, on appelle fonction complètement invariante d'effort une fonction $e : \mathcal{D} \to \overline{R}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $e(d) \geq 0$; $e(d) = 0$ si et seulement si $d \in G$;

(ii) $e(gdh) = e(d)$, $\forall g,h \in G$ (complète invariance de l'effort par rapport à la similitude) ;

(iii) $e(d_1 d_2) \leq e(d_1)+e(d_2)$.

Si dans (ii) on remplace h par g^{-1} , soit si $e(gdg^{-1}) = e(d)$, $\forall g \in G$, $\forall d \in \mathcal{D}$, on dira que $e(d)$ est une fonction (simplement) invariante d'effort.

Passons à la construction de distances invariantes.

Théorème 3.

Soit e un effort complètement invariant (resp. simplement invariant) défini sur $\mathcal{D}$, et soit :

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \min_{d_1,d_2 \in \mathcal{D}} \left(e(d_1)+e(d_2) \; ; \; I_1^{\mathcal{D}} = d_2 I_2^{\mathcal{D}} \; , \; I_2^{\mathcal{D}} = d_1 I_1^{\mathcal{D}}\right) \quad , \quad (6)$$

où l'on suppose que le minimum est atteint ; δ est alors une distance complètement invariante (resp. simplement invariante) définie sur le produit $\mathcal{J}\mathcal{D} \times \mathcal{J}\mathcal{D}$.

(*) Quelle que soit la déformation $d \in \mathcal{D}$, il existe au moins un élément unité à droite, resp. à gauche $e_d, e_g \in \mathcal{D}$ tels que $e_g d = d$, $d e_d = d$, et il existe au moins un élément inverse à gauche, resp. à droite, $d_g^{-1}, d_d^{-1} \in \mathcal{D}$ tels que $d_g^{-1} d = e_d$ et $d d_d^{-1} = e_g$.

Démonstration.

Nous donnerons la démonstration pour les distances complètement invariantes. Nous devons montrer que δ vérifie bien les conditions (i),(ii) et (iii) de la Définition 6. Or (i) a lieu puisque $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$ est toujours positif ou nul en vertu de la condition (i) de la Définition 8 , et que $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = 0$ si et seulement si $e(d_1) = e(d_2) = 0$, soit si $d_1, d_2 \in G$. Il s'ensuit, en vertu de $I_1^{\mathcal{D}} = g_2 I_2^{\mathcal{D}}$, $I_2^{\mathcal{D}} = g_1 I_1^{\mathcal{D}}$, que $I_1^{\mathcal{D}} \equiv I_2 (\text{mod.} G)$.

La fonction est maintenant symétrique en ses deux arguments. Montrons l'inégalité du triangle. Soit donc trois images déformées $I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}$; s'il existe des déformations d_1, d_2, d_3, d_4 telles que :

$$I_1^{\mathcal{D}} = d_2 I_2^{\mathcal{D}} \ , \ I_2^{\mathcal{D}} = d_1 I_1^{\mathcal{D}} \ ,$$

$$I_2^{\mathcal{D}} = d_3 I_3^{\mathcal{D}} \ , \ I_3^{\mathcal{D}} = d_4 I_2^{\mathcal{D}} \ ,$$

alors, en posant $d^{(1)} = d_2 \, d_3$, $d^{(2)} = d_4 \, d_1$, $d^{(1)} \notin \mathcal{D}$, $d^{(2)} \in \mathcal{D}$,

$$I_1^{\mathcal{D}} = d_2 d_3 I_3^{\mathcal{D}} = d^{(1)} \, I_3^{\mathcal{D}} = I_3^{\mathcal{D}} = d_4 d_1 I_1^{\mathcal{D}} = d^{(2)} \, I^{\mathcal{D}} \ ,$$

avec (condition (iii) de la Définition 8) :

$$e(d^{(1)}) + e(d^{(2)}) \leq e(d_1) + e(d_2) + e(d_3) + e(d_4) \ .$$

On en déduit :

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}) = \min \left\{ e(d^{(1)}) + e(d^{(2)}) \ ; \ I_1^{\mathcal{D}} = d^{(1)} I_3^{\mathcal{D}} , \ I_3^{\mathcal{D}} = d^{(2)} I_1^{\mathcal{D}} \right\}$$

$$\leq \min \left\{ e(d_1) + e(d_2) \ ; \ I_1^{\mathcal{D}} = d_2 I_2^{\mathcal{D}} , \ I_2^{\mathcal{D}} = d_1 I_1^{\mathcal{D}} \right\}$$

$$+ \min \left\{ e(d_3) + e(d_4) \ ; \ I_2^{\mathcal{D}} = d_3 I_3^{\mathcal{D}} , \ I_3^{\mathcal{D}} = d_4 I_2^{\mathcal{D}} \right\}$$

$$= \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) + \delta(I_2^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}) \ .$$

La condition (iii) de la Définition 6 $\delta(g_1 I_1^{\mathcal{D}}, g_2 I_2^{\mathcal{D}}) = \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$ résulte de la condition (ii) de la Définition 8. On a en effet :

$$\delta(g_1 I_1^{\mathcal{D}}, g_2 I_2^{\mathcal{D}}) = \min\{e(d^{(1)})+e(d^{(2)}) \; ; \; g_1 I_1^{\mathcal{D}} = d^{(2)} g_2 I_2^{\mathcal{D}} \; , \; g_2 I_2 = d^{(1)} g_1 I_1 \} \; ,$$

où

$$g_1 I_1^{\mathcal{D}} = g_1 d_2 I_2^{\mathcal{D}} = (g_1 d_2 g_2^{-1}) \, g_2 I_2^{\mathcal{D}} \; ,$$

donc $d^{(2)} = g_1 d_2 g_2^{-1}$ et $e(d^{(2)}) = e(d_2)$;

$$g_2 I_2^{\mathcal{D}} = g_2 d_1 I_1^{\mathcal{D}} = (g_2 d_1 g_1^{-1}) \, g_1 I_1^{\mathcal{D}} \; ,$$

donc $d^{(1)} = g_2 d_1 g_1^{-1}$ et $e(d^{(1)}) = e(d_1)$;

on en déduit

$$\begin{aligned}
\delta(g_1 I_1^{\mathcal{D}}, g_2 I_2^{\mathcal{D}}) &= \min\{e(g_2 d_1 g_1^{-1})+e(g_1 d_2 g_2^{-1}) \; ; \\
&\qquad g_1 I_1^{\mathcal{D}} = (g_1 d_2 g_2^{-1}) \, g_2 I_2^{\mathcal{D}} \; , g_2 I_2^{\mathcal{D}} = g_2 d_1 g_1^{-1} \, g_1 I_1^{\mathcal{D}}\} \\
&= \min\{e(d_1)+e(d_2) \; ; \; g_1 I_1^{\mathcal{D}} = g_1 d_2 g_2^{-1} g_2 I_2^{\mathcal{D}} \; , \\
&\qquad g_2 I_2^{\mathcal{D}} = g_2 d_1 g_1^{-1} \, g_1 I_1^{\mathcal{D}}\} \\
&= \min\{e(d_1)+e(d_2) \; ; \; g_1 I_1^{\mathcal{D}} = g_1 d_2 I_2^{\mathcal{D}} \; , g_2 I_2^{\mathcal{D}} = g_2 d_1 I_1^{\mathcal{D}}\} \\
&= \min\{e(d_1)+e(d_2) \; ; \; I_1^{\mathcal{D}} = d_2 I_2^{\mathcal{D}} \; , \; I_2^{\mathcal{D}} = d_1 I_1^{\mathcal{D}}\} \\
&= \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) \; .
\end{aligned}$$

Cela montre bien que la distance est complètement invariante.

Remarque 5.

Nous avons tacitement supposé dans l'énoncé du Théorème 3 qu'il existait une déformation d telle que $I_1^{\mathcal{D}} = d\, I_2^{\mathcal{D}}$, soit que, pour deux images déformées $I_1^{\mathcal{D}}$ et $I_2^{\mathcal{D}}$ données, l'équation $I_1^{\mathcal{D}} = d\, I_2^{\mathcal{D}}$ en d avait au moins une solution(*). S'il n'en était pas ainsi, on attribuerait à $e(d)$ la valeur $+\infty$, si bien que la distance δ deviendrait elle-même infinie.

Application 2.

Considérons des structures de contraste (cf. Chapitre 3, paragraphe 5) dans un espace euclidien normé X (espace de fond ou d'arrière plan), à valeurs dans un espace arbitraire de contraste C. Deux images seront synonymes si elles seront congruentes par rapport aux translations. Supposons alors que les déformations $d : x \to d(x)$, $x \in X$, $d(x) \in X$, sont données par $d(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$, où f est une fonction surjective (strictement) croissante par rapport à chaque composante x_ν, $\nu = 1,2,\ldots,n$. Supposons que pour tout $d \in \mathcal{D}$, la différence $x-f(x)$ est bornée :

$$||x-d(x)|| \leq c_f < \infty \ , \ \forall\, d \in \mathcal{D} \ .$$

Nous définirons la norme d'une déformation par :

$$||d|| = \inf_{g \in G} \sup_{x \in X} ||d(x)-g(x)|| \ , \qquad (7)$$

où g est une translation $g = (g_1,g_2,\ldots,g_n)$, $g_\nu : x_\nu \to x_\nu + g$. Montrons que la fonction $||d||$ est une fonction d'effort. Cette (pseudo) norme est en effet définie sur $\mathcal{D}$ entier, et est égale à zéro si d se réduit à une synonymie (similitude) $d \in G$. Par ailleurs si $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, on a :

$$||d_1\, d_2|| \leq ||d_1||+||d_2|| \ . \qquad (8)$$

En effet :

(*) On rapprochera cela de la propriété de bon enchaînement dans les espaces métriques connexes.

$$||d_1\, d_2|| = \inf_{g\in G} \sup_{x\in X} ||d_1(d_2(x)) - g(x)||$$

$$\leq \inf_{\gamma,g\in G} \sup_{x\in X} \{||d_1(d_2(x))-\gamma(d_2(x))||+||\gamma(d_2(x)-g(x))||\} ;$$

comme d'autre part $f(x)$ est une fonction (strictement) croissante et surjective, on a :

$$\inf_{\gamma\in G} \sup_{x\in X} ||d_1(d_2(x))-\gamma(d_2(x))|| = \inf_{\gamma\in G} \sup_{y\in X} ||d_1(y) - \gamma(y)|| ;$$

γ étant une translation, on a $\gamma(d_2(x)) = d_2(x) + \hat{\gamma}$, en définitive :

$$||d_1 d_2|| \leq \inf_{\gamma\in G} \sup_{y\in X} ||d_1(y)-\gamma(y)|| + \inf_{h\in G} \sup_{x\in X} ||d_2(x) - h(x)||$$

$$= ||d_1|| + ||d_2|| \ .$$

Il s'ensuit que les conditions (i) et (iii) de la Définition 8 sont vérifiées. La condition (ii) s'écrit :

$$||gdh|| = ||d|| \ ,$$

soit :

$$\inf_{k\in G} \sup_{x\in X} ||g(d(h(x))) - k(x)|| = \inf_{\ell\in G} \sup_{x\in X} ||d(x) - \ell(x)|| \ .$$

En appliquant le même raisonnement que ci-dessus, on voit que l'égalité précédente a lieu $(h(x) = y \ , \ k(h^{-1}(y)) = m(y) \ , \ g(d(y)) - m(y) = d(y)-n(y))$. En vertu alors du Théorème 3 :

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \min_{d_1,d_2\in\mathcal{D}} (||d_1|| + ||d_2|| ; \ I_1^{\mathcal{D}} = d_2 I_2^{\mathcal{D}}, \ I_2^{\mathcal{D}} = d_1 I_1^{\mathcal{D}})$$

est une distance complètement invariante.

Application 3.

Si $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ est un module normé sur G , on peut évidemment définir directement sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ une distance (ce qui revient à supposer, non plus que l'espace de fond X mais l'espace des contrastes C est normé).

On partira d'une norme G-invariante $||I^{\mathcal{D}}||$. Deux cas particuliers sont importants : celui de la norme uniforme

$$||I^{\mathcal{D}}||_u = \sup_{x \in X} ||I^{\mathcal{D}}(x)|| \quad , \tag{9}$$

et celui de la norme L^p

$$||I^{\mathcal{D}}||_p = \left(\int_X ||I^{\mathcal{D}}(x)||^p \, \mu(dx)\right)^{1/p} \quad , \; p \geq 1 \quad , \tag{10}$$

où l'intégrale est prise par rapport à une mesure G-invariante.

Si $||g\, I^{\mathcal{D}}|| = ||I^{\mathcal{D}}||$ pour tout $g \in G$, alors $||I^{\mathcal{D}}||_u$ et $||I||_p$ sont deux normes G-invariantes.

Supposons d'une façon générale que l'on a défini une norme G-invariante $||I^{\mathcal{D}}||$ sur $\mathcal{J}^{\mathcal{D}}$ et soit :

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \inf_{g_1, g_2 \in G} ||g_1\, I_1^{\mathcal{D}} - g_2\, I_2^{\mathcal{D}}|| \tag{11}$$

la distance qu'elle induit sur le produit cartésien $\mathcal{J}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{J}^{\mathcal{D}}$.

On a le résultat suivant, analogue du premier résultat du 2.2.b.1).

Théorème 4.

Si pour chaque couple $I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}} \in \mathcal{J}^{\mathcal{D}}$ la fonction δ est définie par la relation (11), alors δ est une distance complètement invariante.

Démonstration.

On a en effet :

(i) $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) \geq 0$, et $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = 0$ si et seulement si $I_1^{\mathcal{D}} \equiv I_2^{\mathcal{D}}$ (mod. G) ;(c'est évident) ;

(ii) $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \delta(I_2^{\mathcal{D}}, I_1^{\mathcal{D}})$; (c'est aussi évident) ;

$$\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}) \leq \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) + \delta(I_2^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}})$$

puisque :

$$\begin{aligned}\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}) &= \inf_{g_1, g_2 \in G} \|g_1 I_1^{\mathcal{D}} - g_3 I_3^{\mathcal{D}}\| \\ &\leq \inf_{g_1, g_2, g_3 \in G} \{\|g_1 I_1^{\mathcal{D}} - g_2 I_2^{\mathcal{D}}\| + \|g_2 I_2^{\mathcal{D}} - g_3 I_3^{\mathcal{D}}\|\} \\ &\leq \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) + \delta(I_2^{\mathcal{D}}, I_3^{\mathcal{D}}) \ ;\end{aligned}$$

(iii) Enfin $\delta(\gamma_1 I_1^{\mathcal{D}}, \gamma_2 I_2^{\mathcal{D}}) = \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$, $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in G$,

puisque :

$$\begin{aligned}\delta(\gamma_1 I_1^{\mathcal{D}}, \gamma_2 I_2^{\mathcal{D}}) &= \inf_{g_1, g_2 \in G} \|\gamma_1 g_1 I_1^{\mathcal{D}} - \gamma_2 g_2 I_2^{\mathcal{D}}\| \\ &= \inf_{h_1, h_2 \in G} \|h_1 I_1^{\mathcal{D}} - h_2 I_2^{\mathcal{D}}\| \\ &= \delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) \ .\end{aligned}$$

Rappelons que la condition (iii) implique que $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}})$ dépend uniquement des structures de $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \mathcal{I}^{\mathcal{D}}/G$ et, qu'en posant $\delta(I_1^{\mathcal{D}}, I_2^{\mathcal{D}}) = \Delta(\mathcal{P}_1^{\mathcal{D}}, \mathcal{P}_2^{\mathcal{D}})$, Δ est une fonction définie sur $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ à valeurs dans $\overline{R}_+$ et qui sépare les structures de $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$.

c. Construction de fonctions de reconnaissance.

Nous avons vu que l'on avait deux types de distances, l'un de distances complètement invariantes, l'autre de distances (simplement) invariantes. On en déduira deux types de fonctions de reconnaissance : les fonctions de reconnaissance à distance minimum pour le premier type, qui pourront être considérées à la fois comme des applications de $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{P}$, et de $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{P}$, et les fonctions de reconnaissance du second type, qui ne pourront être considérées que comme des applications de $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{P}$, mais non de $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{P}$.

1) Fonctions de reconnaissance à distance complètement invariante.

Définition 9.

Soit δ une distance complètement invariante, définie sur le produit $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ (donc aussi sur $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$), et soit $I^{\mathcal{D}} \in \mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ une image déformée donnée. On appelle fonction de reconnaissance à distance minimum une fonction $\alpha : \mathcal{Y}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{P}$ définie de la façon suivante :

(i) α associe à $I^{\mathcal{D}}$ la structure pure $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{P} = \mathcal{Y}/G$, pour laquelle $\delta(I, I^{\mathcal{D}})$, $I \in \mathcal{P}_\alpha$, est minimum (on suppose que le minimum est atteint pour une seule structure $\mathcal{P}_\alpha$, sans quoi il y aurait ambiguité) ;

(ii) si pour toutes les images pures $\delta(I, I^{\mathcal{D}}) = +\infty$, l'image $I^{\mathcal{D}}$ ne peut être reconnue.

La condition (ii) signifie que la déformation d subie par l'image pure a été trop grande. Seules les classes de structures déformées qui se trouvent à une distance finie de $\mathcal{P}$ peuvent être traitées d'une façon significative. D'une façon générale, ces modèles supposent que l'on a affaire à des petites déformations plutôt qu'à des grandes.

La distance δ est complètement invariante par définition, sa valeur dépend uniquement des structures auxquelles appartiennent les images I et $I^{\mathcal{D}}$: $\delta(I, I^{\mathcal{D}}) = \delta(gI, hI^{\mathcal{D}})$. Cela nous a mené à introduire Δ : $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}} \to \overline{R}_+$, et en l'occurence on peut aussi bien dire que α minimise la distance $\Delta : \mathcal{P}_\alpha \times \mathcal{P}_\beta^{\mathcal{D}} \to \overline{R}_+$ où $I \in \mathcal{P}_\alpha$, $I^{\mathcal{D}} \in \mathcal{P}_\beta^{\mathcal{D}}$; on a ainsi obtenu une application $\alpha : \mathcal{P}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{P}$; est donc une fonction de reconnaissance G-invariante.

Une variance de la reconnaissance à distance minimum est la reconnaissance par effort minimum. Rappelons que l'on définit à partir d'une fonction d'effort complètement invariante e(d) une distance complètement invariante :

$$\delta(I,I^{\mathcal{D}}) = \min_{d,d'\in\mathcal{D}} \left(e(d)+e(d') \; ; \; I = d'I^{\mathcal{D}} \; , \; I^{\mathcal{D}} = dI\right) \quad ,$$

(si d est une bijection et si $\mathcal{D}$ est un groupe, d' serait égal à $d^{-1}\in\mathcal{D}$) et que l'on déduit une fonction de reconnaissance à distance minimum. Si d' est égal à d, ou si $e(d')$ est égal à $e(d)$, la reconnaissance s'obtiendra en minimisant $e(d)$.

La variante consiste à minimiser $e(d)$, que $e(d')$ soit égal ou non à $e(d)$.

Définition 10.

Soit e une fonction complètement invariante d'effort définie sur $\mathcal{D}$; on appelle fonction de reconnaissance par effort minimum une fonction de reconnaissance α qui associe à une image déformée donnée $I^{\mathcal{D}} = dI$ la structure pure $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{P}$ contenant l'image pure I, et la déformation $d\in\mathcal{D}$, $d : I \to I^{\mathcal{D}}$, qui sont telles que l'effort $e(d)$ est minimum :

$$e(d) = e(d \; ; \; d : I \to I^{\mathcal{D}} \equiv dI) = \min \text{ pour } I^{\mathcal{D}} \quad , \qquad (12)$$

où le minimum est supposé atteint.

Remarquons que, dans ce cas également, la fonction α reconnait les structures. Si en effet, le couple (d,I) est solution du problème variationnel (12), alors le couple (dg^{-1},gI) l'est aussi, puisque :

$$dg^{-1} : gI \to dg^{-1}(gI) = dI \quad ,$$

et que

$$e(dg^{-1}) = e(d)$$

en vertu de la condition (ii) de la Définition 8.

Si enfin on considère l'image déformée $hI^{\mathcal{D}}$, $h\in G$, le problème variationnel a encore comme solution le couple (hdg^{-1}, gI) puisque :

$$hdg^{-1} : gI \to hdg^{-1}(gI) = hdI \quad ,$$

et que

$$e(hdg^{-1}) = e(d) .$$

Il s'ensuit que l'on associe à la structure déformée $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \mathcal{I}^{\mathcal{D}}/G(hI^{\mathcal{D}} \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}})$ la structure pure $\mathcal{P} = \mathcal{I}/G(gI \in \mathcal{P})$, et que la fonction de reconnaissance ainsi définie est toujours G-invariante.

2) Fonction de reconnaissance à distance simplement invariante minimum.

On procéderait exactement comme au paragraphe précédent, en considérant des distances simplement invariantes (au lieu de complètement invariantes).

On doit cependant remarquer que les distances simplement invariantes ne peuvent pas être considérées comme des distances définies sur $\mathcal{P}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ (ou sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$), et qu'en conséquence la fonction de reconnaissance α ne pourra plus être considérée comme une application de $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{P}$. Elle reste être une application de $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{P}$, et reste être également une fonction G-invariante.

2.3. Grammaires probabilistes de déformation.

Comme pour les grammaires métriques, il s'agit de reconnaître la structure pure $\mathcal{P}_\alpha$ d'une image déformée $I^{\mathcal{D}}$, moyennant la connaissance de distributions de probabilité appropriées.

Les déformations ont en général un caractère aléatoire. Si alors certaines déformations se produisent avec une fréquence plus grande que d'autres, et également à propos de certaines structures plutôt que d'autres, on a des renseignements qui doivent permettre de retrouver la structure cachée sous l'image déformée. Le problème est de se donner une distribution de probabilité sur les déformations, quand seules les images déformées sont observables (non les déformations elles-mêmes). Définir une fonction aléatoire $P : \mathcal{I} \to \mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ qui applique l'ensemble $\mathcal{I}$ des images pures dans l'ensemble $\mathcal{I}^{\mathcal{D}}$ des images déformées et désigner l'image déformée par $I^{\mathcal{D}} = dI$, où $d \in \mathcal{D}$

est l'opérateur de déformation, revient à postuler une mesure de probabilité P définie sur l'ensemble $\mathcal{D}$, ce qui induit une mesure de probabilité P_I sur $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ pour chaque image pure I .

Ce paragraphe sera divisé en 3 parties : une première sur la définition des grammaires probabilistes de déformation et sur des propriétés d'invariance ; une seconde sur la reconnaissance lorsqu'on se donne une mesure de probabilité sur les déformations ; enfin une dernière sur la reconnaissance lorsqu'on se donne des mesures de probabilité a priori sur $\mathcal{P}$ et conditionnelles sur $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{P}$.

Lorsqu'on se donne une mesure de probabilité P sur $\mathcal{D}$, qui en induit donc une P_I si $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$ pour chaque image pure I , un algorithme de reconnaissance définira une application ϕ des images déformées $I^{\mathcal{D}}$ dans les structures $\mathcal{P}_r$. Ces structures sont des sous-ensembles stables par G de $\mathcal{Y}$. Le comportement d'un algorithme de reconnaissance sera jugé suivant sa perte moyenne ; cela suppose que la fonction de perte a été définie sur le produit $\mathcal{P}_r \times \mathcal{P}_r$. Comme on le fait souvent en théorie de la décision, nous chercherons une règle de vraisemblance qui corresponde à une distribution uniforme a priori sur $\mathcal{P}_r$.

a. Définition des grammaires probabilistes de déformation et propriétés d'invariance.

Définition 11.

Soit P une mesure de probabilité définie sur une σ-algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de sous-ensembles de l'ensemble $\mathcal{D}$ des déformations, et soient $\mathcal{A}(\mathcal{Y})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^{\mathcal{D}})$ des σ-algèbres de $\mathcal{Y}$, respectivement de $\mathcal{Y}^{\mathcal{D}}$, telles que pour chaque couple d'ensembles $E \in \mathcal{A}(\mathcal{Y})$, $F \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^{\mathcal{D}})$, l'on ait :

$$\{d \; ; \; dE \in F\} \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \quad . \tag{13}$$

On appelle grammaire probabiliste de déformation, et on désigne par

$$\mathcal{G}_{prob} = (\mathcal{G}_{def}, P) \quad , \tag{14}$$

une grammaire de déformation probabilisée par la mesure P (de probabilité) sur $\mathcal{A}(\mathcal{D})$.

Soit $H \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Il sera quelquefois utile d'exprimer $P(H)$ à l'aide d'une densité de probabilité p ; on écrira :

$$P(H) = P(d \in H) = \int_H p(d)\ \tilde{d}\mu(d)$$

ou

$$= \int_H p(d) \cdot \mu(\tilde{d}d) \quad , \tag{15}$$

où μ est une mesure σ-finie, et où $\tilde{d}$ représente l'élément différentiel ($p(d)$ est la dérivée Radon-Nicodym de P relativement à la mesure μ) .

Passons aux propriétés d'invariance. Comme au paragraphe 2.2.b.2.) des grammaires métriques, nous supposerons que $\mathcal{D}$ est un semi-groupe avec élément unité qui contient comme sous-groupe le groupe G des similitudes.

Définition 12.

Une grammaire probabiliste de déformation est covariante en probabilité (par rapport à G) si pour toute transformation de similitude $g \in G$, les fonctions aléatoires dg et gd ont la même loi de probabilité. On dit encore que la mesure de probabilité P de la déformation est covariante, ou que des déformations sont covariantes en probabilité.

Théorème 5.

Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit covariante en probabilité est que l'on ait pour tout $g \in G$, $H \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, $d \in \mathcal{D}$:

$$P(d \in H) = P(d \in gHg^{-1}) = P(g^{-1}dg \in H) \quad . \tag{16}$$

Démonstration.

La condition est nécessaire puisque :

$$P(d \in H) = P(gd \in gH) \quad ,$$

et si P est covariante :

$$P(gd \in gH) = P(dg \in gH) \quad ,$$

d'où il résulte :

$$P(d \in H) = P(dg \in gH) = P(dgg^{-1} \in gHg^{-1}) = P(d \in gHg^{-1}) = P(g^{-1}dg \in H) \ .$$

La condition est suffisante puisque de (16) on déduit :

$$P(d \in H) = P(gd \in gH) = P(g^{-1}dg \in H) = P(dg \in gH) \quad .$$

Remarque 5.

On peut aussi définir la covariance en probabilité (par rapport à G) non plus sur $\mathcal{A}(\mathfrak{D})$, mais sur $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^{\mathfrak{D}})$. On aura alors :

$$P(dI \in F) = P(gdI \in gF) = P(dgI \in gF) = P(g^{-1}dgI \in F) \ . \qquad (16')$$

b. Construction de fonctions de reconnaissance lorsqu'est donnée une mesure de probabilité sur $\mathfrak{D}$.

Nous supposerons qu'il existe une densité de probabilité $p(d)$, définie comme en (15) , et que les déformations sont covariantes en probabilité. Il s'ensuit en vertu de (15) et (16) que :

$$p(d) = p(g^{-1}dg) \quad . \qquad (17)$$

Soit alors $I^{\mathfrak{D}} = dI$ une image déformée. $I^{\mathfrak{D}}$ étant donné, d et I sont deux "variables" liées, et ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs, car l'équation $I^{\mathfrak{D}} = dI$ n'a pas toujours, pour l'une des variables fixée, une solution en l'autre. On pose alors la

Définition 13.

Soit $I^{\mathfrak{D}} \in \mathcal{Y}^{\mathfrak{D}}$ une image déformée donnée ; on appelle reconnaissance par vraisemblance maximum (où à fonction de vraisemblance maximum) la résolution du problème variationnel :

$p(d)$ = max pour tout I et d satisfaisant la relation $dI = I^{\mathfrak{D}}$; (18) soit (I_o, d_o) le couple qui réalise ce maximum ; on affecte à $I^{\mathfrak{D}}$ la structure pure à laquelle appartient I_o .

Nous supposons qu'il n'y a qu'un seul maximum ; s'il y en avait plusieurs, $I^{\mathfrak{D}}$ pourrait appartenir à plusieurs structures et il pourrait y avoir ambiguité.

Théorème 6.

Si les déformations sont covariantes en probabilité, la fonction de reconnaissance par maximum de vraisemblance définit une application de $\mathcal{P}^{\mathfrak{D}}$ dans $\mathcal{P}$ et est donc G-invariante.

Démonstration.

Soit en effet $gI^{\mathfrak{D}}$ une image déformée semblable à $I^{\mathfrak{D}}$, on aura :

$$gI^{\mathfrak{D}} = gdI = (gdg^{-1})\, gI \quad .$$

Comme cette relation est en fait équivalente à $I^{\mathfrak{D}} = dI$, et comme en vertu de (17) , $p(gdg^{-1}) = p(d)$ (il suffit dans (17) de remplacer d par gdg^{-1}) , il s'ensuit que la solution du problème (18), à savoir $p(gdg^{-1})=\max$, sera le couple (gI_o, gd_og^{-1}) , où I_o et d_o sont les valeurs trouvées précédemment. On en déduit que $gI^{\mathfrak{D}}$, qui est semblable à $I^{\mathfrak{D}}$, sera reconnu comme appartenant à la même structure que gI_o , c'est à dire que I_o , c'est à dire $\mathcal{P}_\alpha$. La fonction de reconnaissance par maximum de vraisemblance définit donc une application de $\mathcal{P}^{\mathfrak{D}}$ dans $\mathcal{P}$ et est par conséquent G-invariante ($\alpha(gdI) = \alpha(dI)$).

Remarque 6.

La plupart des résultats classiques concernant le principe du maximum de vraisemblance supposent que l'espace des paramètres et l'espace des échantillons sont des espaces euclidiens de dimension finie. Il y aurait lieu d'étudier les propriétés d'échantillonnage du maximum de vraisemblance lorsque ces espaces sont la grammaire image déformée et la grammaire image pure, comme il s'en présente en Reconnaissance des Structures.

c. Construction de fonctions de reconnaissance lorsque sont données des mesures de probabilité a priori sur $\mathcal{P}$ et conditionnelle sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

Théorème 7.

Si les déformations sont covariantes en probabilité, les probabilités conditionnelles $P(F/\mathcal{P}_\nu)$ sont bien définies pour tout ensemble stable par $F \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ et tout $\mathcal{P}_\nu \in \mathcal{D}/G$.

Démonstration.

Soit I un prototype de $\mathcal{P}_\nu$, et considérons la probabilité conditionnelle $P(F/\mathcal{P}_\nu) = P(dgI_o \in F/gI_o \in \mathcal{P}_\nu)$. On a, puisque les déformations sont covariantes, et que I_o est un prototype de $\mathcal{P}_\nu$:

$$P(dgI_o \in F/gI_o \in \mathcal{P}_\nu) = P(gdI_o \in F/I_o \in \mathcal{P}_\nu) \quad .$$

On a par ailleurs, puisque F est stable par G :

$$P(gdI_o \in F/I_o \in \mathcal{P}_\nu) = P(dI_o \in F/I_o \in \mathcal{P}_\nu) \quad .$$

Il s'ensuit que la probabilité conditionnelle P sera constante sur des classes de similitude de $\mathcal{P} = \mathcal{D}/G$, et est définie sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^{\mathcal{D}} = \mathcal{D}/G \times \mathcal{D}^{\mathcal{D}}/G$.

On peut alors appliquer les résultats de la théorie statistique de la décision.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Nous donnerons dans ce chapitre, pour illustrer le modèle exposé aux chapitres 1 et 2, quelques exemples de grammaires de structures.

Nous commencerons par 3 types de structures que l'on pourrait qualifier de structures abstraites dans la mesure où elles ne dépendent pas directement de la réalité physique de l'objet à reconnaître : ce sont les structures cycliques (que l'on peut rencontrer dans des formes à symétrie circulaire), les structures de permutation, et les structures que nous désignerons par groupales, pour mentionner qu'elles se définissent uniquement par les transformations de similitude des signes composant l'image, par référence à des prototypes donnés, où l'on admet évidemment que G forme un groupe. Nous examinerons ensuite 2 types de structures concrètes appartenant plus particulièrement au domaine des formes visuelles : les structures curvilignes (symboles alphanumériques, empreintes digitales, etc...) supposées ne pas avoir d'épaisseur, et les structures de contraste qui non seulement restituent cette épaisseur, et les structures de continuité des zones d'ombre et de lumière d'un dessin. Ce dernier type - les structures de contraste - est au demeurant assez général pour englober une variété de structures de natures très différentes.

Rappelons que les grammaires de structures pures ont été formées d'après le schéma suivant :

$$S(G) \xrightarrow{+} C(G) \xrightarrow{R} \mathcal{Y} \xrightarrow{T} \mathcal{P}(G)$$
$$\mathcal{Y} \xrightarrow{F} \mathcal{L}$$

où :

$$S(G) = \bigcup_i S_{\sigma_i} \quad , \quad S_{\sigma_i} = \{ s_{\sigma_i} \; ; \; s_{\sigma_i} \in S_{\sigma_i} \} \; ;$$

$$\mathcal{P}(G) = T(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y} \; ; \quad \mathcal{P}(G) = \bigcup_j \mathcal{P}_j \quad , \quad \mathcal{P}_j = \{ I \; , \; I = T\, I_j \; , \; I_j \in \mathcal{Y} \} \; ;$$

$$g\, \mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_j \; , \; g \in G \; ; \quad \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \; ,$$

$$F = \{f \ ; \ f : \mathcal{I} \to \mathcal{E} \ , \ f(I_1) = f(I_2) \iff I_1, I_2 \in \mathcal{P}_j\} \ ,$$

$\mathcal{E}$ étant l'ensemble des réels ou un autre ensemble à préciser.

Nous définirons, dans chacun des exemples, les éléments de cette grammaire, et, en particulier, les ensembles $S, \mathcal{I}, \mathcal{P}$ et les fonctions $+$, R, T ou F.

Ces éléments seront plus ou moins compliqués, à savoir : S (vecteurs de R^n, éléments de courbes, fonctions définies dans le plan à valeurs réelles ou vectorielles) ; loi de composition $+$ (addition vectorielle, superposition, concaténation) ; G (transformations cycliques, déplacements euclidiens dans le plan, groupe de Lie de transformations de R^2 en lui-même) ; R (égalité des vecteurs, identification) ; T (égal à G en général).

En ce qui concerne les grammaires de déformation, nous devons définir $\mathcal{D}$. Nous avons dit que les déformations n'étaient pas observables. Et, en effet, on observe les images déformées et on tâche d'en induire une structure acceptable de $\mathcal{I}$. Il est évident que plus cette structure sera proche de la réalité (ce qui demande une réelle compréhension du mécanisme de déformation), plus la reconnaissance aura des chances d'être précise. Quoi qu'il en soit, nous nous donnerons $\mathcal{D}$. Or, nous avons vu qu'un élément d agissait globalement sur une image pure :

$$I^{\mathcal{D}} = dI = d(s_1, \ldots, s_n) \ .$$

Cela n'indique pas comment il agit sur chaque signe (rappelons qu'a priori, $d(I_1+I_2) \neq dI_1 + dI_2$, donc $d(s_1+\ldots+s_n) \neq ds_1+\ldots+ds_n$. Nous supposerons en général que $\mathcal{D}$ est décomposable en produit de facteurs $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \ldots$. On admettra alors que

$$I^{\mathcal{D}} = dI = (d_1 s_1, d_2 s_2, \ldots, d_n s_n) \ ;$$

autrement dit, le problème $d(s_1+\ldots+s_n) = d_1 s_1 + d_2 s_2 + \ldots + d_n s_n$ a une solution $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ indépendante des signes s_i. C'est ce vecteur d que nous fixerons.

Comme par ailleurs on se propose de déterminer des modèles qui, non seulement représentent des phénomènes que l'on étudie avec une assez bonne approximation , mais aussi qui puissent être traitées analytiquement ou numériquement sans trop de difficultés, on sera amené à postuler à l'occasion la covariance (ou la covariance en probabilité) des déformations.

Ces grammaires seront métriques ou probabilistes : dans le premier cas on se donnera une distance sur $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$, dans le second une mesure de probabilité P sur $\mathcal{D}$. Dans certains exemples, on pourra faire ressortir l'équivalence des grammaires métriques et probabilistes que l'on aura défini, quant aux critères de reconnaissance. Enfin, disons que l'intérêt de ces applications est plus dans la définition des grammaires elles-mêmes, c'est à dire dans l'analyse des structures, que dans le choix des fonctions de reconnaissance sur lesquelles la littérature est particulièrement riche en algorithmes.

3.1. Structures cycliques.

Le terme de cyclique se rapporte aux transformations de similitude.

a. Grammaire des images pures.

Nous supposerons que l'ensemble S des signes est constitué par les vecteurs de R^n :

$$S = \{s_i \; ; \; s_i = (x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\} \quad . \qquad (1)$$

Nous envisagerons deux cas : celui où les composantes $x_\nu^{(i)}$ sont simplement données, et celui où elles sont engendrées par des récurrences linéaires à coefficients constants (équations différentielles discrétisées ou équations aux différences), chaque récurrence produisant les signes d'un même type.

Le groupe G des transformations de similitude g sera défini par :

$$gS = \{gs \; ; \; gs = (x_{1+\gamma},\ldots,x_{n+\gamma}) \quad , \quad g \in G \; , \; s \in S\} \quad , \qquad (2)$$

où $j+\gamma$ est entendu $(j+\gamma)$ (mod. n) , et où γ est la translation - ou la rotation - d'indices correspondant à g .

La loi de composition $+$ sera l'addition vectorielle, et une configuration $c \in C$, qui est un vecteur de R^n , se notera :

$$c = (s_1,s_2,\ldots,s_m) = s_1+s_2+\ldots+s_m \; , \; s_i \in S \; , \; 1 \leq i \leq m \; . \qquad (3)$$

La loi d'identification R sera l'égalité vectorielle, et deux configurations c , $c' \in C$ seront identifiées si :

$$s_1+\ldots+s_m = s'_1+\ldots+s'_m \quad . \qquad (4)$$

Il s'ensuit qu'une image I sera un vecteur de R^n , que nous représenterons par :

$$I = (X_1,X_2,\ldots,X_n) \quad , \qquad (5)$$

et que, compte tenu de (1),(2),(3), la similitude g transformera l'image I en :

$$gI = (X_{1+\gamma},X_{2+\gamma},\ldots,X_{n+\gamma}) \quad . \qquad (6)$$

On prendra comme ensemble T des transformations de synonymie le groupe cyclique G : deux images I , I' appartiendront à la même structure s'il existe un $g \in G$ tel que :

$$I' = gI \quad ;$$

on aura donc $\mathcal{P} = \mathcal{I}/G$.

b. Grammaire des déformations.

Nous supposerons que les déformations $d \in \mathfrak{D}$ se décomposent en déformations $d_1, d_2, \ldots, d_n$ agissant séparément sur chaque composante de I, et que chaque d est un élément de G. On posera :

$$I^{\mathfrak{D}} = dI = d(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_{1+d_1}, X_{2+d_2}, \ldots, X_{n+d_n}) \qquad (7)$$

Puisque G est commutatif, $dg = gd$, et les déformations sont covariantes. Elles sont également homomorphes : $d(I_1+I_2) = dI_1 + dI_2$.

Si la grammaire est métrique, il s'agit de se donner une distance dans $\mathfrak{I}/G$; si elle est probabiliste, de définir une mesure de probabilité sur $\mathfrak{D}$. Nous ne considérerons que les grammaires métriques. Nous prendrons deux distances assez naturelles, l'une la norme ℓ^1 :

$$\delta(I, I^{\mathfrak{D}}) = \sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu| \quad ; \qquad (8)$$

l'autre (non définie dans R^n, mais définie dans $\mathfrak{I}^{\mathfrak{D}}/G$) :

$$\delta(I, I^{\mathfrak{D}}) = \text{nombre de } X_{\nu+d_\nu} \neq X_\nu \ . \qquad (9)$$

c. Fonctions de reconnaissance.

Nous voulons reconnaître une image comme provenant d'une des structures $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_\rho$ de $\mathcal{P} = \mathfrak{I}/G$. Soit $I = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ l'image observée, et soit $I_\mu = (X_1^{(\mu)}, X_2^{(\mu)}, \ldots, X_n^{(\mu)})$ un prototype de $\mathcal{P}_\mu$. Toutes les images semblables à I_μ seront de la forme $gI_\mu = (X_{1+\gamma}^{(\mu)}, X_{2+\gamma}^{(\mu)}, \ldots, X_{n+\gamma}^{(\mu)})$. L'image à reconnaitre provient d'une de ces images : si elle est pure, on a :

$$Y_\nu = X_{\nu+\gamma}^{(\mu)} \ , \ \nu = 1,2,\ldots,n \quad ; \qquad (10)$$

Si elle est déformée, on a :

$$Y_\nu = X_{\nu+\gamma+d_\nu}^{(\mu)} \ , \ \nu = 1,2,\ldots,n \ . \qquad (11)$$

Nous commencerons par les images pures.

Comme chaque image est définie à une rotation des indices près, on les réarrange de façon à avoir en tête la composante maximum. S'il y en avait deux (ou plusieurs), on choisirait comme prototype celle dont le successeur est le plus grand (X_ν, si $X_\nu = X_\mu$ et $X_{\nu+1} > X_{\mu+1}$), et ainsi de suite. Il reste à comparer le vecteur obtenu avec les vecteurs prototypes des structures. On a, en définitive, basé un schéma de reconnaissance sur la famille de sondages :

$$\begin{cases} f_1 = \max_p Y_p \text{ , que l'on désignera par } Y_\nu \text{ ,} \\ f_2 = \max_\nu Y_{\nu+1} \text{ ,} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (12)$$

Si les composantes des signes sont engendrées par des récurrences linéaires à coefficients constants, chaque récurrence engendrant les signes d'un même type, on peut décomposer l'image en images-types. On a le

Théorème 1.

Soit l'opérateur aux différences L_σ d'ordre p et la récurrence linéaire correspondante relative aux composantes des signes $s_\sigma = (x_1^\sigma,\ldots,x_n^\sigma)$, que l'on désignera par $x_1,\ldots,x_n$:

$$L_\sigma x_\nu = a_o x_\nu + a_1 x_{\nu-1} + \ldots + a_p x_{\nu-p} = 0 \text{ , } \nu = 1,2,\ldots,n \qquad (13)$$

où $x_o, x_{-1}, \ldots, x_{-p+1}$ sont p composantes données, où les constantes $a_o, a_1, \ldots, a_p$ sont déterminées par la condition que les racines $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de l'équation caractéristique

$$a_o z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p = 0 \qquad (14)$$

soient distinctes, de module 1, et d'argument un multiple de $\frac{2\pi}{n}$, et où les racines caractéristiques des différents opérateurs L_σ sont toutes différentes ($z_i' \neq z_i$, $\forall i$).

La fonction :

$$f_k = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \, z_k^{-\nu} \qquad (15)$$

est alors un sondage.

Démonstration :

On montre que la solution générale est exprimable analytiquement sous la forme

$$x_\nu = c_1 \, z_1^\nu + c_2 \, z_2^\nu + \ldots + c_p \, z_p^\nu \quad , \qquad (16)$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sont des constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales, c'est à dire sont des fonctions de $x_o, x_{-1}, \ldots, x_{-p+1}$.

On a aussi, d'après les hypothèses :

$$z_j = e^{i\mu_j \frac{2\pi}{n}} \quad , \quad \mu_j \text{ entier}, \quad 0 \leq \mu_j \leq n-1 \quad ; \qquad (17)$$

d'où :

$$x_\nu = \sum_{j=1}^{p} c_p \, e^{i\mu_j \frac{2\pi}{n}\nu} \quad . \qquad (18)$$

La solution x_ν est bien périodique ($x_{\nu+n}$ est bien égal à x_ν) et l'ensemble des types S_σ est bien stable par G . Considérons alors l'expression (15) qui nous servira à définir des sondages. Elle s'écrit :

$$f_k = \sum_{\nu=1}^{n} e^{-i\mu_k \nu \frac{2\pi}{n}} \sum_{j=1}^{p} c_j \, e^{i\mu_j \nu \frac{2\pi}{n}}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} c_j \sum_{\nu=1}^{n} e^{i(\mu_j - \mu_k)\nu \frac{2\pi}{n}}$$

$$= c_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} c_j \sum_{\nu=1}^{n} \left(\cos \nu(\mu_j - \mu_k) \frac{2\pi}{n} + i \sin \nu(\mu_j - \mu_k) \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$f_k = c_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} c_j \frac{\sin \frac{n}{2}(\mu_j-\mu_k)\frac{2\pi}{n}}{\sin(\mu_j-\mu_k)\frac{\pi}{n}} \left(\cos \frac{n+1}{2}(\mu_j-\mu_k)\frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{n+1}{2}(\mu_j-\mu_k)\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= c_k \ .$$

Comme au moins un c_k est différent de zéro, on a au moins un f_k différent de zéro.

Mais supposons maintenant que les s_ν soient des signes d'un autre type σ', les z_j restant les racines de l'équation caractéristique du générateur L_σ. Dans le calcul de f_k, il faudra remplacer μ_j par μ'_j. Comme aucune des racines z_j n'est égale à une racine z'_j (provenant du générateur de signes L_σ, également d'ordre p), alors μ_k est différent de tous les μ'_j et $f_k = 0$ pour tout k. Alors le Postulat 1 sur les types est satisfait et les fonctions f_k sont des sondages.

Cela permet de décomposer, en somme par une analyse de Fourier, une image $I(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ en images types :

$$I(Y_1,\ldots,Y_n) = I_{\sigma_1}(Y_{1,\sigma_1},\ldots,Y_{n,\sigma_1}) + I_{\sigma_2}(Y_{1,\sigma_2},\ldots,Y_{n,\sigma_2}) + \ldots \quad (19)$$

Il suffit, en effet, de calculer

$$f_{k,\sigma_\ell} = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu Z_{k,\sigma_\ell}^{-\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} Y_{\nu,\sigma_\ell} Z_{k,\sigma_\ell}^{-\nu} \quad (20)$$

pour tout k, et de comparer les valeurs obtenues à celles d'images prototypes, pour d'abord voir si I_{σ_ℓ} existe dans I, et ensuite à quels prototypes de structure I peut appartenir.

Passons aux images déformées. Pour cela revenons à (11). C'est un système dont les inconnues sont les n valeurs entières $d_\nu + \gamma$. Soit μ^* une valeur de μ pour laquelle (11) a une solution. Si l'on prend la distance (8), la reconnaissance par distance minimum se traduit par :

$$\min_{\mu^*} \delta(I,I^{\mathcal{D}}) = \min_{\mu^*} \sum_{\nu=1}^{n} |\gamma^*+d_\nu^*| \ . \quad (21)$$

Si l'on prend la distance (9) , la reconnaissance par distance minimum se traduit par :

$$\min_{\mu^*} \delta(I, I^{\mathcal{D}}) = \min_{\mu^*} \text{ nombre de } Y_{\nu}^{(\mu^*)} \neq X_{\nu+\gamma}^{(\mu^*)} \quad . \tag{22}$$

Donnons un exemple. Soit :

$$I^{\mathcal{D}} = (b, d, d, a, a)$$

une image déformée, et soient

$$I^{(1)} = (a, b, c, d, e) \quad ,$$
$$I^{(2)} = (a, b, b, a, d)$$

2 prototypes de structures pures $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. On se rend compte d'abord que $I^{\mathcal{D}}$ peut provenir de ces 2 structures puisque toutes les lettres de $I^{\mathcal{D}}$ sont contenues dans $I^{(1)}$ et $I^{(2)}$. On a ensuite en appliquant (21)

$$\min \delta(I^{(1)}, I^{\mathcal{D}}) = 7 \quad ,$$
$$\min \delta(I^{(2)}, I^{\mathcal{D}}) = 6 \quad .$$

On affectera $I^{\mathcal{D}}$ à la structure $\mathcal{P}_2$. On peut en déduire γ qui est égal à 2 .

Si l'on appliquait (22), on aurait

$$\min_{\gamma} \delta(I^{(1)}, I^{\mathcal{D}}) = 2 \quad ,$$
$$\min_{\gamma} \delta(I^{(2)}, I^{\mathcal{D}}) = 2 \quad .$$

On peut affecter $I^{\mathcal{D}}$ soit à la structure $\mathcal{P}_1$, soit à la structure $\mathcal{P}_2$. Dans le premier cas $\gamma = 1$, dans le 2ème cas $\gamma = 2$.

Remarquons que l'on ne peut pas appliquer (12) c'est à dire déduire préalablement la valeur de γ , la composante maximum pouvant être affectée et avoir disparu.

3.2. Structures de permutations

Reprenons le modèle du paragraphe 3.1., à la différence près que la transformation de similitude g effectue une permutation des indices:

$$gI = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_{1+g_1}, X_{2+g_2}, \ldots, X_{n+g_n}) \quad .$$

Chaque signe, et donc chaque image, a $(n! - 1)$ signes, respectivement images, qui leur sont semblables, et non plus $n-1$ .Il est évident que l'on peut reconnaître une image pure avec la même famille de sondages qu'en (12). Indépendamment de cette fonction de reconnaissance, valable dans le cas du modèle très simple du paragraphe 3.1., on peut d'une façon générale utiliser les fonctions symétriques des composantes :

$$\begin{cases} f_1 = \Sigma\, X_\nu \quad , \\ f_2 = \Sigma\, X_\nu\, X_\mu \quad , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = \Sigma\, X_1, X_2, \ldots, X_n \quad , \end{cases} \tag{23}$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{cases} f_1 = \Sigma\, X_\nu \quad , \\ f_2 = \Sigma\, X_\nu^2 \quad , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n = \Sigma\, X_\nu^n \quad , \end{cases} \tag{23'}$$

qui sont des ensembles complets, tels donc que si pour 2 images on a les mêmes valeurs de $f_1, f_2, \ldots$, ces deux images sont semblables, et réciproquement.

Passons à un cas plus compliqué.

a. Grammaire des images pures.

Considérons l'ensemble $E = \{1,2,\ldots,n\}$ chaque élément étant le sommet d'un graphe non orienté. Les signes sont les arêtes joignant deux sommets. Nous admettrons qu'une multiplicité d'arêtes joignant deux mêmes sommets i et j se confond en une seule et même arête. Nous la désignerons par x_{ij} , $j > i$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, $j = i + 1,\ldots,n$ et la représenterons par une matrice strictement supérieure, c'est à dire de diagonale nulle, ayant un 1 en ligne i et colonne j si l'arête existe, 0 sinon, soit :

$$x_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \vdots \\ & 1 \\ 0 & \ddots \\ & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \ldots i \\ \\ \\ \end{array} \tag{24}$$

On pose $x_{ii} = 0$.

La loi de composition sera l'addition matricielle, avec la règle d'addition des éléments :

$$\begin{aligned} &0 + 0 = 0 \quad , \\ &0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad , \\ &1 + 1 = 1 \quad . \end{aligned} \tag{25}$$

La loi de composition est commutative. Les configurations seront alors des matrices triangulaires, strictement supérieures, formées de 0 et de 1 , et la loi d'identification sera l'égalité matricielle. Les images, décrites par C_n^2 nombres x_{ij} , seront des matrices comme les configurations.

Définissons le groupe G des transformations de similitude g . A l'ensemble E on fait correspondre une permutation g quelconque des éléments qui applique $E = \{1,2,\ldots,i,\ldots,j,\ldots,n\}$ dans $E' = \{p_1,p_2,\ldots,p_i,\ldots,p_j,\ldots,p_n\}$:

$$g = \begin{pmatrix} 1,2,\ldots,i,\ldots,j,\ldots,n \\ p_1,p_2,\ldots,p_i,\ldots,p_j,\ldots,p_n \end{pmatrix} \tag{26}$$

si bien que l'arête x_{ij} est transformée en l'arête $x'_{p_i p_j}$ si $p_j > p_i$ et $x'_{p_j p_i}$ si $p_i > p_j$. (L'ordre de E est en effet rompu et l'on pourrait adopter la convention $x_{j,i} = x_{ij}$, $j > i$, où $x_{j,i}$ est une matrice triangulaire strictement inférieure). Deux images seront donc semblables s'il existe une permutation $g \in G$ les transformant l'une dans l'autre : $I \simeq I'$ s'il existe $g \in G$ tel que $I' = gI$.

L'ordre du groupe G est au plus n! (une image possédrait n! images semblables si le graphe était orienté et non $(n(n-1)/2)!$ qui correspond aux permutations opérant sur les x_{ij} et non plus sur E).

Prenons comme ensemble T des transformations de synonymie le groupe G des permutations sur E ; nous dirons donc que deux images I et I' appartiennent à la même structure s'il existe une permutation $g \in G$ telle que $I' = gI$.

Exemple 1

Considérons l'ensemble des graphes formés sur $n = 4$ sommets et ne possédant que $q = 2$ arêtes ($q \leq N = C_n^2$, N = nombre total des arêtes). Pour simplifier l'écriture, désignons l'image $I_{ij,k\ell} = x_{ij} + x_{k\ell}$ par son indice $ijk\ell$. L'ensemble des C_N^2 images est alors :

12 13
12 14 13 14
12 23 13 23 14 23 (27)
12 24 13 24 14 24 23 24
12 34 13 34 14 34 23 34 24 34 .

Prenons la première image 12 13 et cherchons toutes ses semblables. Pour cela, portons dans une colonne toutes les permutations de E , et dans une autre colonne, en correspondance, les images semblables à 12 13 . On a compte tenu de la commutativité :

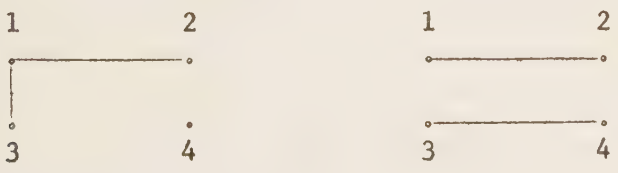
12 34	12 13	21 34	21 23 = 12 23
12 43	12 14	21 43	21 24 = 12 24
13 24	13 12 = 12 13	23 14	23 21 = 23 12 = 12 23
13 42	13 14	23 41	23 24
14 23	14 12 = 12 14	24 13	24 21 = 24 12 = 12 24
14 32	14 13 = 13 14	24 31	24 23 = 23 24

31 24	31 32 = 13 23	41 23	41 42 = 14 24
31 42	31 34 = 13 34	41 32	41 43 = 14 34
32 14	32 31 = 23 13 = 13 23	42 13	42 41 = 24 14 = 14 24
32 41	32 34 = 23 34	42 31	42 43 = 24 34
34 12	34 31 = 34 13 = 13 34	43 12	43 41 = 34 14 = 14 34
34 21	34 32 = 34 23 = 23 34	43 21	43 42 = 34 24 = 24 34

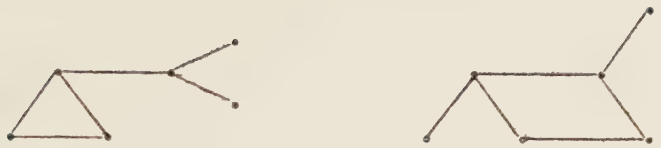
11 images sur les 14 (autres que 12 13) du tableau (27) sont donc semblables à 12 13 . Il en reste 3, à savoir 12 34, 13 24 et 14 23 , que l'on pourrait voir, en répétant le processus précédent, être semblables entre elles.

Remarque 1

Les 15 images du tableau (27) se répartissent donc en 2 structures différentes, qui représentent, la 1ère l'ensemble des images pour lesquelles on a 1 sommet d'où aucune arête n'est issue, 2 sommets d'où part 1 arête, et 1 sommet d'où partent 2 arêtes ; et la 2ème, l'ensemble des images pour lesquelles les 4 sommets sont joints séparément par une seule arête.



Cette dernière façon intuitive de distinguer les différentes structures n'est cependant pas une caractéristique générale de ces sortes de structures comme le montre le contre-exemple suivant



où les 2 images représentées ne sont pas synonymes.

La traduction matricielle de la définition de la similitude (voir, par exemple, la construction des images semblables, suite du tableau (27)) donne le

Théorème 2.

Deux images I et I' sont semblables, $I' = gI$, si et seulement si, en désignant par I^T respectivement I'^T leurs transposées et en posant :

$$\tilde{I} = I + I^T \ , \ \tilde{I} = I' + I'^T \quad , \tag{28}$$

il existe une matrice $P^{(*)}$ de permutation telle que :

$$\tilde{I}' = P \, \tilde{I} \, P^T \quad ,$$

où

$$P = \prod_{ij} P_{ij} = \prod_{ij} (I - p_{ij}) \quad , \tag{29}$$

$$p_{ij} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \ldots \ i \\ \ldots \ j \end{array} \\ \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ i & j \end{array} \end{array}$$

Comme $p = p^T$, $p^2 = 2p$, $PP^T = P^T P = I$, on a $P^{-1} = P^T$, et P est une matrice orthogonale. P est solution (si elle existe) de l'équation :

$$P \, \tilde{I} - \tilde{I}' \, P = 0 \quad . \tag{30}$$

(*) Une matrice de permutation a un élément non nul par ligne et par colonne, égal à l'unité.

Exemple 2.

On a ainsi :

$$\tilde{I}_{1213} = P_{34}\, P_{13}\, \tilde{I}_{2334}\, P_{13}\, P_{34} \quad ,$$

où

$$P = P_{34}\, P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Remarquons que les permutations ne peuvent pas se faire dans n'importe quel ordre ; ainsi $P_{13}\, P_{34}\, \tilde{I}_{2334}\, P_{34}\, P_{13} = \tilde{I}_{1424}$. On pourrait le voir facilement sur des figures.

b. Grammaire des déformations.

Les images sont formées d'arêtes x_{ij} , soit :

$$I = \{x_{ij} \; ; \; i = 1,2,\ldots,n-1, \; j = i+1, \; i+2, \; \ldots,n\} \quad , \qquad (31)$$

où $x_{ij} = 1$ si l'arête existe, 0 sinon.

Nous introduirons les déformations par la relation :

$$I^{\mathfrak{D}} = dI = \{y_{ij}\} = \{x_{ij} + d_{ij}\} \quad , \qquad (32)$$

où

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{avec la probabilité } p \quad , \\ 1-x_{ij} & \text{avec la probabilité } 1-p \quad , \end{cases} \qquad (33)$$

ou bien sous forme matricielle :

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{avec la probabilité } p \ , \\ E_{ij} - x_{ij} & \text{avec la probabilité } 1-p \ , \end{cases} \qquad (33')$$

E_{ij} étant la matrice formée d'un 1 en ligne i et colonne j et 0 ailleurs. Il s'ensuit que :

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ou } (0) & \text{avec la probabilité } p \ , \\ 1 \text{ ou } E_{ij} & \text{avec la probabilité } 1-p \ , \end{cases} \qquad (33'')$$

si l'on prend pour loi de composition $y_{ij} = x_{ij} + d_{ij}$, l'addition modulo 2(1+1 = 0) . Nous supposerons enfin que les déformations d_{ij} sont stochastiquement indépendantes, et qu'elles ont la même distribution, autrement dit que p a la même valeur pour tous les couples (i,j) .

Cette grammaire de déformation n'est pas covariante, mais est covariante en probabilité.

c. Fonctions de reconnaissance.

Nous commencerons par les images pures.

Théorème 3.

Soit $\mathcal{Y} = \{y_{ij}\}$ l'ensemble des fonctions scalaires définies sur l'ensemble des arêtes d'une image $I \in \mathcal{Y}$, prenant les valeurs 1 ou 0 suivant que les sommets i et j sont reliés ou non dans l'image I ; soient $g \in G$ une permutation quelconque de $E = \{1,2,\ldots,n\}$ et $z_{p_i p_j} = g\, y_{ij}$, i = 1,2,...,n-1 , j = i+1, i+2, ..., n . Le polynome G-invariant :

$$Q(z) = \prod_{g \in G} L(gz) \ , \qquad (34)$$

où

$$L(z) = \sum_{ij} (1-y_{ij})\, z_{p_i p_j} + y_{ij}(1-z_{p_i p_j}) \ , \qquad (35)$$

est un sondage dans l'ensemble des images.

Démonstration :

Soit une image $I \in \mathcal{I}$, indexée $ij, k\ell, mn, \ldots$ où $\{i,j,k,\ell,m,n,\ldots\} \in E$. Toutes les images $I' = gI$ semblables à I , correspondant chacune à une permutation E' de E , sont indexées p_{ij} , $p_{k\ell}$, p_{mn} ,..., si bien qu'à chaque arête ij de I correspond une arête et une seule, $p_i p_j$ de I' , et que toutes les expressions linéaires :

$$(1-y_{ij})\, y'_{p_i p_j} + y_{ij}(1-y'_{p_i p_j}) \qquad (36)$$

sont nulles (y_{ij} et $y'_{p_i p_j}$ sont en effet égaux à 1 ou à 0 en même temps). Si, par contre, deux images I et I' n'appartiennent pas à la même structure, il n'existe pas - par définition - de permutation $g : E \to E'$ faisant correspondre I' à I , c'est à dire telle qu'à chaque arête de I corresponde une et une seule arête de I' et qu'en même temps à chaque sommet i de I corresponde le même sommet p_i de I'[(*)] . Dans le deuxième cas, $I' = gI$, $\forall g \in G$, une fois associés les sommets (et non les arêtes) $i,j,k,\ell,\ldots$ et $p_i, p_j, p_k, p_\ell \ldots$ deux à deux, de façon que le maximum d'arêtes se correspondent dans cette transformation, il y aura toujours, quel que soit $g \in G$ un couple d'arêtes y_{ij} et $y'_{p_i p_j}$ non homologues et donc au moins une valeur de (34) non nulle (égale à 1). Autrement dit, le polynome (35) , où (ij) prend ses valeurs dans le tableau triangulaire :

$$\begin{array}{l} 12\ 13\ 14\ \ldots\ 1n \\ \quad 23\ 24\ \ldots\ 2n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad n-1,n \end{array} \qquad (37)$$

(*) Ainsi, par exemple, les 2 images indexées 1213 et 2334 sont bien semblables car $12 \to 32 = 23$, $13 \to 34$, et $1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 4$. Par contre, les 2 images 1213 et 1234 ne sont pas semblables car si $1 \to 1$, $2 \to 2$, $3 \to 4$, on aurait $13 \to 14$ et non 34.

est tel que :

$$L(I') = 0 \quad \text{si} \quad I' \equiv I \pmod{G} \ ,$$
$$L(I') > 0 \quad \text{si} \quad I' \not\equiv I \pmod{G}^{(*)} \ . \qquad (38)$$

Il en résulte que le polynome G-invariant (34)

$$Q(I) = 0$$
$$Q(I') > 0 \ , \ I' \not\equiv I \pmod{G}$$

sépare les images I et I' .

Le résultat ci-dessus est un sondage exprimant la similitude de I et I' s'il existe au moins une permutation telle que (34) soit nul, et la non similitude si toutes les permutations donnent un résultat non nul.

On peut aussi, si l'ensemble des images et des structures a déjà été étiqueté, donner un autre algorithme de reconnaissance d'une image. Si celle-ci est de nouveau décrite à l'aide de $\frac{n(n-1)}{2}$ nombres I_{ij} ($i = 1,\ldots,n-1$; $j = 1,\ldots,n$) , où $I_{ij} = 1$ ou 0 suivant qu'il existe ou non une arête reliant les sommets i et j , on a le :

Théorème 4.

Soit la fonction $a(I)$ définie pour chaque image I à n sommets :

$$I = \{I_{ij} \ ; \ i = 1,2,\ldots,n-1 \ ; \ j = i+1,\ldots,n\} \ ,$$

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ sont reliés} \\ 0 & \text{sinon} \ , \end{cases}$$

par :

(*) Considérons, à titre d'exemple, les images non semblables I_{1213} et I'_{1234} ; on a $E = \{1,2,3,4\}$, $E' = \{2,4,3,1\}$ et
$L(z) = (\ )_{12}+(\ )_{13}+(\ )_{14}+(\ )_{23}+(\ )_{24}+(\ )_{34} = 1+1+1+1+0+0 = 4$.
Quelle que soit la permutation E' , on aurait $L(z) > 0$.

$$a(I) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}-1} I_{12} + 2^{\frac{n(n-1)}{2}-2} I_{13} + 2^{\frac{n(n-1)}{2}-3} I_{14} + \ldots$$
$$+2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1} I_{23} + 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}-2} I_{24} + \ldots + I_{n-1,n} \quad . \tag{39}$$

$a(I)$ prend toutes les valeurs entières de 1 à $2^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$, lorsque I parcourt $\mathcal{J}$, si bien qu'à chaque image I correspond une valeur de a, et qu'à chaque valeur de a correspond une et une seule image. Si l'on définit, pour chaque image I, la fonction $\alpha(I)$ par :

$$\alpha(I) = \max_{g \in G} a(gI) \quad , \tag{40}$$

alors $\alpha(I)$ est un sondage dans l'ensemble des images.

Démonstration.

$\alpha(I)$ est évidemment G-invariant. Considérons deux images I et I' telles que $a(I) = a(I')$. On a :

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(I'_{12} - I_{12}) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}-2}(I_{13} - I'_{13}) + \ldots + (I_{n-1,n} - I'_{n-1,n}) \tag{41}$$

où

$I_{ij} - I'_{ij}$ est égal à 1, 0, ou -1.

Or le membre gauche de (41) a pour valeur $\pm 2^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$ ou 0. Il ne peut être égal à $\pm 2^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$ car le membre droit a, en valeur absolue, pour maximum $2^{\frac{n(n-1)}{2}-1} - 1$ (progression géométrique de raison 2). Il s'ensuit qu'il est égal à 0, et que $I_{12} = I'_{12}$. Et ainsi de suite. D'où $I = I'$.

On a donc une bijection de $\mathcal{J}$ dans l'ensemble $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$.

Pour toutes structures $\mathcal{P}_m$ soit $I_{\mathcal{P}_m}$ l'image (unique) pour laquelle est atteinte la valeur :

$$\max_{I \in \mathcal{P}_m} a(I) = \max_{g \in G} a(gI_{\mathcal{P}_m}) \quad .$$

Nous pouvons considérer ici $I_{\mathcal{P}_m}$ comme le (et non un) prototype de la structure $\mathcal{T}_m$. Pour deux structures $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{m'}$, telles que $\alpha(\mathcal{P}_m) = \alpha(\mathcal{P}_{m'})$, on a alors $a(gI_{\mathcal{P}_m}) = a(g'I'_{\mathcal{P}_{m'}})$, ce qui implique, comme nous l'avons vu, $gI_{\mathcal{P}_m} = g'I'_{\mathcal{P}_{m'}}$ et $I_{\mathcal{P}_m} = g^{-1}g'I'_{\mathcal{P}_{m'}}$, si bien que les prototypes $I_{\mathcal{P}_m}$ et $I'_{\mathcal{P}_{m'}}$ sont synonymes : les structures $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{m'}$ coïncident. La qualité $\alpha(I)$ est une fonction G-invariante, définie sur $\mathcal{J}$ entier et telle que $\alpha(I_1) \neq \alpha(I_2)$ si $I_1 \not\equiv I_2 \pmod G$: c'est un sondage dans l'ensemble des images.

Exemple 3.

Prototype	nombre d'images semblables	valeurs de a	valeur de α (correspondant au prototype)
I_{1234}	3	12,18,33	33

On pourrait vérifier que, pour toutes les images à 4 sommets, $a(I)$ prend toutes les valeurs entières comprises entre 1 et 63, auxquelles on rajoute la valeur 0 pour I_0 (absence d'arêtes).

Passons aux images déformées. Soit une image

$$I = \{x_{ij} \; ; \; i = 1,2,\ldots,n-1 \; , \; j = i+1,i+2,\ldots,n\} \; ,$$

et soit une déformation d telle que l'on ait δ valeurs de d_{ij} nulles et $(n(n-1)/2)-\delta$ valeurs de d_{ij} différentes de 0, telle donc que :

$$dI = \underbrace{\sum_{k\ell} x_{k\ell}}_{\delta} + \underbrace{\sum_{mn} (E_{mn} - x_{mn})}_{n(n-1)/2 - \delta} \; , \qquad (42)$$

avec la probabilité :

$$P = p^{\delta}(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2} - \delta} = (1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\delta} \; . \qquad (43)$$

La reconnaissance par maximum de vraisemblance est d'après le Théorème 6 du paragraphe 2.3.b. invariante (G). La distribution de probabilité sur $\mathfrak{D}$ est donnée par (43), si bien qu'il faut maximiser P pour l'image observée $I^{\mathfrak{D}}$, et sur toutes les structures pures $\mathcal{P}_\nu$. Cela revient à minimiser δ si $p < 1/2$, à maximiser δ si $p > 1/2$, et à maximiser ou minimiser δ au hasard avec des probabilités égales si $p = 1/2$. La reconnaissance par maximum de vraisemblance se réduit ici à une reconnaissance par distance minimum, où la distance est choisie de façon adéquate (nombre de d_{ij} égaux à 0 si $p < 1/2$, nombre de $d_{ij} \neq 0$ si $p \geq 1/2$).

3.3. Structures groupales.

a. Grammaire des images pures.

Un cas particulier important est celui où on suppose par hypothèse qu'il y a unicité de la décomposition d'une image en images types, c'est à dire unicité de l'analyse grammaticale de l'image. Supposons que les configurations soient formées à partir de n silhouettes non semblables $m_1, m_2, \ldots, m_n$ d'où :

$$c = (s_1, s_2, \ldots, s_n) = (g_1 m_1, g_2 m_2, \ldots, g_n m_n) \quad , \tag{44}$$

et de même :

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n \quad , \tag{45}$$

où I_j est l'image correspondant à une même silhouette m_j. Comme g_j est la transformation associée à la silhouette m_j, comme s_j est déterminé de façon unique par I_j, et comme m_j est donné, I_j sera une fonction de g_j seul, et I sera une fonction de $g_1, g_2, \ldots, g_n$ uniquement. I peut alors être représenté par un point dans l'espace des g_i ; $i = 1, \ldots, n$:

$$I = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n \quad , \tag{46}$$

où G^n est le groupe produit direct $G^n = \underbrace{G \times G \times \ldots \times G}_{n \text{ fois}}$. Soit alors un

prototype $I_\alpha = (g_1^{(\alpha)}, g_2^{(\alpha)}, \ldots, g_n^{(\alpha)})$ de la structure $\mathcal{P}_\alpha$; toutes les images de cette structure se déduiront de I_α en appliquant aux signes $s_j^{(\alpha)}$ la même transformation g , si $T = G$, c'est à dire si la synonymie coïncide avec la similitude. Introduisons le sous-groupe Γ de tous les éléments de G^n de la forme $(g,g,\ldots,g)$. Les structures $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots,$ seront des classes disjointes d'équivalence modulo Γ , et $\mathcal{I}/\Gamma = G^n/\Gamma$ est à la réunion de ces classes(*). Reconnaitre la structure à laquelle appartient une image I signifie identifier la classe d'équivalence à laquelle appartient I .

Si, d'autre part, les configurations sont formées de n_1 signes engendrés à partir de la silhouette m_1 , n_2 signes à partir de m_2 , etc..., n_k signes à partir de m_k , avec $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$, nous noterons :

$$c = (g_1 m_1, \ldots, g_{n_1} m_1 , g_{n_1+1} m_2, \ldots, g_{n_1+n_2} m_2, \ldots) ,$$

et

$$I = (g_1, \ldots, g_{n_1}, g_{n_1+1}, \ldots, g_{n_1+n_2}) \in G_s^n , \qquad (47)$$

où G_s^n est composé des éléments du produit direct $G^n = \underbrace{G\times\ldots\times G}_{n_1}\times\ldots\times\underbrace{G\times\ldots\times G}_{n_k}$ (n).

Si la loi de composition est commutative (superposition), deux images ne se différencient que par une permutation de tout groupe d'indices $n_i + 1$, $n_i + 2, \ldots, n_i + n_j$, étant alors identiques (ainsi :

(*) Pour tout couple d'éléments $I_j, I_k \in G^n$, on pose $I_j \sim I_k \pmod{\Gamma}$ si et seulement si $-I_j+I_k \in \Gamma$. Cette relation est une relation d'équivalence et pour chaque élément I_j du groupe G^n : $(I_j) = I_j + \Gamma = \{I_j+\gamma; \gamma\in\Gamma\}$ où l'on a désigné par (I_j) la classe d'équivalence contenant l'élément $I_j \in G^n$. Les sous-ensembles $(I_j) = I_j+\gamma$ sont des classes d'équivalence à gauche du groupe Γ dans G^n , et on définit de la même façon les classes d'équivalence à droite $\Gamma+I_j$, $I_j \in G^n$, de Γ dans G^n . Elles coïncident si la loi de composition est commutative, par exemple la superposition. La totalité des classes d'équivalence se désigne par $\mathcal{I}/\Gamma = G^n/\Gamma$.

$$\Big(\underbrace{g_1,\dots,g_{n_1}}_{\substack{\text{permutation}\\ \text{des } n_1 \text{ premiers}\\ \text{indices}}}\ ,\ \underbrace{g_{n_1+1},\dots,g_{n_1+n_2},\dots}_{\substack{\text{permutation}\\ \text{des } n_2 \text{ indices}\\ \text{suivants}}}\Big) \quad ,$$

G_s^n est G^n modulo le produit de k groupes symétriques $S_{n_1}\times S_{n_2}\times\dots\times S_{n_k}$.

La reconnaissance s'accomplit en classant l'image suivant la classe d'équivalence modulo Γ (dans G_s^n) à laquelle elle appartient.

b. Grammaire des déformations.

Nous ne considérerons que le cas de la formule (46) et supposerons que les déformations $d\in\mathfrak{D}$ se décomposent en déformations $d_1,d_2,\dots,d_n$, chaque d_ν étant un élément de G. On posera :

$$\begin{aligned} &d = (d_1,d_2,\dots,d_n) \quad , \quad d_\nu\in G \quad ,\\ &dI = (d_1g_1,d_2g_2,\dots,d_ng_n) = (h_1,h_2,\dots,h_n) \quad . \end{aligned} \tag{48}$$

Nous allons définir une grammaire de déformation métrique de la façon suivante. Soit $\delta(g,h), g,h\in G$, une distance invariante sur G, et soit ϕ une fonction de δ positive, décroissante et sous-exponentielle, telle donc que

$$\phi(\delta_1+\delta_2) \le \phi(\delta_1)\cdot\phi(\delta_2) \quad . \tag{49}$$

La fonction $\Phi(I,I^{\mathfrak{D}})$ définie par

$$\begin{aligned} &\Psi(g,h) = -\log\frac{\phi(\phi(g,h))}{\phi(0)} \quad ,\\ &\Phi(I,I^{\mathfrak{D}}) = \sum_{\nu=1}^{n}\Psi(g_\nu,h_\nu) \quad , \end{aligned} \tag{50}$$

est une distance (simplement) invariante sur $I^{\mathfrak{D}}\times I^{\mathfrak{D}}$.

En effet, Ψ et Φ sont non-négatifs, et symétriques en leurs arguments. On a $\Psi(g,g) = 0$ et $\Phi(I,I) = 0$. De plus, si $\Phi(I,I) = 0$, alors $\Psi(g_\nu,h_\nu) = 0$, $\forall \nu$, d'où $\phi(\delta(g_\nu,h_\nu) = \phi(0)$, $\forall \nu$, et il résulte du caractère décroissant de ϕ que $\delta(g_\nu,h_\nu) = 0$, soit $g_\nu = h_\nu$, $\forall \nu$. Enfin pour tout $g,h,k \in G$, on a

$$\delta(g,k) \leq \delta(g,h) + \delta(h,k) \quad ,$$

d'où

$$-\log \frac{\phi(\delta(g,k))}{\phi(0)} \leq -\log \frac{\phi(\delta(g,h)+\delta(h,k))}{\phi(0)} \quad ,$$

et en utilisant la propriété de sous-exponentialité

$$-\log \frac{\phi(\delta(g,k))}{\phi(0)} \leq -\log \frac{\phi(\delta(g,h))}{\phi(0)} - \log \frac{\phi(\delta(h,k))}{\phi(0)} \quad ,$$

si bien que Ψ et Φ satisfont l'inégalité du triangle.

c. Fonction de reconnaissance.

Nous nous placerons dans le cas des images déformées. Soit

$$I^{\mathcal{D}} = (h_1,h_2,\ldots,h_n) \tag{51}$$

l'image observée, et soit

$$I^{(\mu)} = (g_{\mu_1},g_{\mu_2},\ldots,g_{\mu_n}) \tag{52}$$

un prototype de la structure $\mathcal{P}_\mu$. Toutes les images semblables à $I^{(\mu)}$ seront de la forme

$$gI^{(\mu)} = (gg_{\mu_1},gg_{\mu_2},\ldots,gg_{\mu_n}) \quad . \tag{52'}$$

L'image déformée provient d'une de ces images, c'est à dire que l'on a

$$h_\nu = d_\nu \, gg_\mu \quad , \tag{53}$$

ou encore puisque G est un groupe

$$d_\nu = h_\nu \, g_{\mu_\nu}^{-1} \, g^{-1} \quad . \tag{53'}$$

La reconnaissance par distance minimum consistera à résoudre

$$\min_{\mu,g} \Phi(gI^{(\mu)}, I) = \min_{\mu,g} \sum_{\nu=1}^{n} \Psi(gg_{\mu_\nu}, h_\nu) \quad . \tag{54}$$

Si l'on avait considéré une grammaire probabiliste de déformation dans laquelle tous les d_ν seraient stochastiquement indépendants avec la même distribution de probabilité $\rho = \phi(\delta(g,h))$, la reconnaissance par maximum de vraisemblance se confondrait avec la reconnaissance par distance minimum (54).

3.4. Structures curvilignes

Nous considérerons ici les structures formées de courbes, en général planes, supposées sans épaisseur, par exemple : symboles alpha-numériques, empreintes digitales. Les signes sont des arcs de courbes (segments de droite, arcs circulaires, etc...), et les images se composent par superposition suivant certaines conventions d'orientation et de position.

a. Grammaire des images pures.

a.1. Structures euclidiennes.

A titre d'exemple, nous allons considérer le cas important où les arcs de courbes sont représentées par des fonctions analytiques et où les transformations de similitude $g \in G$ sont des déplacements euclidiens dans le plan. Un arc peut, dans ces conditions, être donné sous forme intrinsèque et invariante.

Les signes sont donc définis par :

$$\frac{d\Phi}{d\ell} = \gamma(\ell) \quad , \tag{55}$$

où γ est la courbure, Φ l'angle que fait la tangente avec une direction donnée, et ℓ la longueur de l'arc.

L'origine des arcs pouvant être arbitraire, nous dirons que deux types σ_1 et σ_2 sont identiques $(\sigma_1 = \sigma_2)$ si :

$$\gamma_{\sigma_1}(\ell) \equiv \gamma_{\sigma_2}(\ell+h) \qquad (56)$$

pour tout ℓ et au moins un h.

Considérons les déplacements euclidiens dans le plan qui composent le groupe de similitude G ; elles ne modifient pas l'équation (55), et deux signes sont semblables s'ils ont même équation intrinsèque, c'est à dire s'ils appartiennent au même type.

La loi de composition est la réunion, et nous écrirons une configuration c sous la forme :

$$c = (s_1, s_2, \ldots, s_m) = s_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup s_m \quad ; \qquad (57)$$

Cette opération de réunion peut correspondre à la superposition des signes

En résumé, on a défini le modèle suivant de grammaire de structures curvilignes à déplacements euclidiens :

(i) pour chaque type σ il existe une fonction $\gamma(\ell)$ analytique sur la droite réelle ; si $\gamma_{\sigma_1}(\ell) = \gamma_{\sigma_2}(\ell+h)$ pour au moins un h et tout ℓ, alors les types σ_1 et σ_2 sont identiques, $\sigma_1 = \sigma_2$;

(ii) un signe de S_σ consiste en un arc dont l'équation intrinsèque est $\gamma(\ell) = \gamma_\sigma(\ell) = \frac{d\Phi}{d\ell}$.

(iii) si $c = (s_1, \ldots, s_m)$ et $c' = (s'_1, \ldots, s'_m)$ alors cRc' si $s_1 \cup \ldots \cup s_m = s'_1 \cup \ldots \cup s'_m$;

(iv) le groupe G des similitudes est formé des déplacements euclidiens dans le plan.

On séparera les différents points d'une configuration (ou d'une image) en : un point $x \in I$ sera <u>régulier</u> s'il est un point intérieur d'exactement un arc analytique appartenant à I ; sinon il sera <u>singulier</u>. Les points singuliers seront alors : les points terminaux (les extrêmités d'un arc), les points de rebroussement (qui peuvent être ou non des points terminaux), et les points de ramification. On pourrait faire la convention que tout point singulier est un point terminal, autrement dit que tout arc est limité par deux points singuliers.

La reconnaissance d'une image s'effectuera alors en la décomposant en signes (arcs) ; un arc sera suivi jusqu'à la rencontre d'un point singulier, et classé suivant le γ_σ qui apparait dans son équation intrinsèque. L'exploiration continuera jusqu'à ce que toutes les composantes soient identifiées et classées d'après le type σ , la transformation g et les points terminaux.

a.2. <u>Structures différentielles</u>.

Dans le modèle précédent, les signes d'un même type σ s'extrayaient d'une seule courbe ; dans ce modèle-ci, nous supposerons qu'ils s'extraient d'une famille de courbes, plus précisément qu'ils s'extraient des courbes intégrales d'une équation différentielle, et si l'on se place dans R^2 , en se limitant par exemple au 1er ordre, de :

$$F_\sigma(x,y,y') = 0 \quad ; \qquad (58)$$

nous supposerons, de plus, que par chaque point de R^2 passe une et une seule courbe intégrale C_σ . Enfin, comme à l'accoutumée, nous supposerons que deux types σ_1 et σ_2 n'ont aucun signe en commun, et que si F_{σ_1} et F_{σ_2} coïncident sur un sous-ensemble de R^2 , les signes correspondants sont exclus de S_{σ_1} et S_{σ_2} .

Prenons pour groupe de similitude G un groupe de LIE de transformations de R^2 sur lui-même. Nous voulons que $F_\sigma(x,y,y') = 0$ soit stable par rapport aux transformations de ce groupe, auquel cas une courbe intégrale sera transformée en une autre courbe intégrale de la même famille, et donc un

signe en un autre signe du même type : la famille de courbes intégrales de $F_\sigma = 0$ sera globalement stable par les transformations du groupe.

En résumé, on a le modèle suivant pour les grammaires de structures différentielles curvilignes :

(i) si $\sigma_1 \neq \sigma_2$ l'ensemble de R^2 où l'élément de surface sur lequel F_{σ_1} coïncide avec F_{σ_2} ne doit contenir aucun signe de S_{σ_1} ou S_{σ_2} ;

(ii) les signes de S_σ consistent en arcs satisfaisant l'équation $F_\sigma(x,y,y') = 0$;

(iii) si $c = (s_1,\ldots,s_n)$, $c' = (s'_1,\ldots,s'_n)$, alors cRc' si $s_1 \cup \ldots \cup s_n = s'_1 \cup \ldots \cup s'_n$;

(iv) le groupe G de similitude est un groupe de LIE de transformations de R^2 sur lui-même.

Ajoutons que si un signe est G-invariant, $gs = s$, la transformation g transforme la courbe intégrale contenant s en elle-même, et non en une autre courbe de la famille ; s n'apporte de ce fait aucune information sur la transformation g en question, et doit être exclu de l'ensemble des signes considérés dans (ii).

Le groupe G de similitude étant un groupe de LIE de transformations de R^2 sur lui-même, nous le définirons par les transformations infinitésimales de coordonnées :

$$dx = X(x,y)\,du\ ,\quad dy = Y(x,y)\,du^{(*)}\ , \tag{59}$$

(*) Les transformations (59) sont des transformations dépendant d'un paramètre u ; On peut réécrire (59) sous la forme $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = du$. Soit $\Phi(x,y) = c_1$ une intégrale première des deux premiers rapports. En exprimant y en fonction de x , et en considérant les deux derniers rapports, leur intégrale sera de la forme $\Psi(y,c_1) = \Psi(x,y) = c_2 + u$. Prenons comme condition initiale $u = 0$: $x = \tilde{x}$, $y = \tilde{y}$. On a alors $\Phi(x,y) = \Phi(\tilde{x},\tilde{y})$, $\Psi(x,y) = \Psi(\tilde{x},\tilde{y}) + u$. Si on exprime maintenant x et y en fonction de $\tilde{x},\tilde{y},u$, on a une transformation de la forme :

$$x = f(\tilde{x},\tilde{y},u)\ ,\quad y = g(\tilde{x},\tilde{y},u)\ ,$$

soit

$$\xi = T_u(\tilde{\xi})\ . \tag{60}$$

Si on suppose les conditions de continuité, de dérivabilité et de biunivocité habituelles satisfaites, le groupe local de LIE des paramètres u est un groupe local de LIE de transformations $\left(\tilde{\xi} = T_e(\tilde{\xi})\right)$ où l'élément neutre e est égal à zéro, et T_e est la transformation identique ; $T_u(T_v(\tilde{\xi})) = T_{uv}(\tilde{\xi})$; si $\tilde{u}\,u = u\,\tilde{u} = e$, alors $\xi = T_{\tilde{u}}(\xi)$; les transformations T_u et T_v coïncident si, et seulement si , $u = v$; $T(\tilde{\xi},u)$ est une fonction continûment différentiable (un nombre suffisant de fois) des coordonnées $\tilde{\xi}$ et u) .

ou, d'une façon équivalente(*) , par l'opérateur infinitésimal :

$$X(x,y)\,\frac{\partial}{x} + Y(x,y)\,\frac{\partial}{y} \quad . \tag{63}$$

L'équation différentielle $F_\sigma(x,y,y') = 0$ peut être résolue par rapport à y' et, en ne considérant évidemment qu'une seule détermination, on écrira $y' = \hat{F}_\sigma(x,y)$. Soit Φ la fonction :

$$\Phi(x,y,y') = \hat{F}_\sigma(x,y) - y' \quad ; \tag{64}$$

si on applique à Φ les transformations du groupe (59), alors x,y,y' deviennent des fonctions de u . Pour que Φ soit invariant, il faut qu'il vérifie une équation du type (62), à savoir

$$X\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Y\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} + Z\,\frac{\partial\Phi}{\partial y'} = 0 \quad , \tag{65}$$

où Z est une fonction de X et de Y puisque y' est une fonction de x et de y . Il s'agit donc de calculer Z , c'est à dire la transformation infinitésimale de y' :

$$dy' = Z(x,y,y')\,du \quad ,$$

(*) Si l'on considère une fonction $\Phi(x,y)$ et si l'on cherche sa transformée par les transformations du groupe (59) , on a :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dy = \left(X\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Y\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)du \quad . \tag{61}$$

Pour que la fonction Φ soit invariante pour les transformations du groupe (59), donc pour qu'elle soit indépendante de u , il faut que $\frac{d\Phi}{du} = 0$, c'est à dire que

$$X\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Y\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad . \tag{62}$$

On peut, par conséquent, aussi bien définir le groupe (59) par la transformation infinitésimale $X\,\frac{\partial}{\partial x} + Y\,\frac{\partial}{\partial y}$.

qui est analogue à (59) ; or $y' = \frac{Y}{X}$ en vertu de (59), par conséquent $dy' = \frac{X dY - X dX}{X^2}$, et, compte tenu de (59),

$$dy' = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial X}{\partial y} y'^2\right) du = Z du \quad . \tag{66}$$

En portant la valeur de Z tirée de (66) dans (65) et en remplaçant Φ par son expression (64) on obtient :

$$X \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + Y \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} y'^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) y' - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0 \quad .$$

Pour que la famille des courbes intégrales de l'équation $\Phi = 0$ (ou $y' = \hat{F}_\sigma$) soit invariante, il faut que :

$$X \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + Y \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} \hat{F}^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \hat{F} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0 \quad . \tag{67}$$

Les signes invariés par le groupe (59) se trouvent sur les courbes intégrales de l'équation $y' = \hat{F}$, où $\hat{F}$ est obtenu en intégrant l'équation aux dérivés partielles (67).

Remarque 2.

Si $\hat{F} = \frac{Y}{X}$, chaque courbe intégrale est stable(*) et, par conséquent, un signe est transformé en lui-même.

Exemple 3.

Prenons pour G l'ensemble des dilatations uniformes définies par l'opérateur infinitésimal :

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad ,$$

et soit l'équation différentielle du premier ordre :

(*) Dans ce cas, l'équation différentielle du groupe de transformations $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ et l'équation différentielle considérée $y' = \hat{F}$ sont identiques; la transformation est une identité vis-à-vis des courbes intégrales prises isolément.

$$y' = F(x,y) \quad ,$$

Cette équation sera invariante si :

1) $\hat{F} = \frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$,

on obtient en intégrant :

$$y' = \frac{y}{x} \quad ,$$

d'où ; $y = cx$, c = constante.

Ce sont les signes G-invariants que nous éliminons.

2) $\hat{F}$ vérifie l'équation (67), soit (puisque $X = x$, $Y = y$) :

$$x \frac{\partial \hat{F}}{\partial x} + y \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} = 0 \ .$$

Il faut résoudre cette équation aux dérivées partielles du 1er ordre ; la solution est (*) :

$$\hat{F} = h(\frac{y}{x}) \quad ,$$

d'où :

$$y' = h(\frac{y}{x}) \quad . \qquad (69)$$

Si l'on considère les deux types :

$$\sigma_1 : y' = -\frac{y}{x} \quad ,$$

$$\sigma_2 : y' = \frac{x}{y} \ ,$$

(*) Soit, en général, l'équation (67) , rappelons qu'on lui associe le système différentiel :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{d\hat{F}}{\frac{\partial X}{\partial y}\hat{F}^2 + (\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y})\hat{F} - \frac{\partial Y}{\partial x}} \ , \qquad (68)$$

la solution générale $\hat{F}$ de (67) s'obtient en annulant une fonction arbitraire à dérivées premières continues de deux intégrales premières distinctes de (68). On sait que lorsque le dénominateur du troisième rapport de (68) est nul, $\hat{F}$ est une fonction arbitraire à dérivées premières continues d'une intégrale première de l'équation différentielle $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$.

les signes de S_{σ_1} seront des arcs d'hyperboles $xy = a$, et les signes de S_{σ_2} des arcs d'hyperboles $y^2 - x^2 = b$, a et b étant des constantes variables. Une image sera formée d'arcs appartenant à ces deux familles d'hyperboles équilatères réciproquement orthogonales.

b. Grammaire des déformations.

b.1. Structures euclidiennes.

α) Nous supposerons pour la simplicité que l'image pure consiste en un seul signe, soit qu'elle est définie par :

$$\frac{d\Phi}{d\ell} = \gamma_r(\ell) \quad , \tag{70}$$

où r prend l'une des valeurs $r = 1,2,\ldots,\rho$, indicative de la structure pure $\mathcal{T}_r$ à laquelle elle appartient, et où ℓ varie, sans que cela nuise à la généralité, dans l'intervalle $(0,1)$. Une spécification complète de l'image demande que l'on fixe les conditions initiales

$$b = (x_o, y_o, \Phi_o) \quad . \tag{71}$$

Les déformations peuvent jouer sur (70) et sur (71). Nous supposerons pour l'instant que les conditions initiales ne sont pas sujettes à des déformations, et nous prendrons pour définition des images déformées, le modèle

$$\frac{d\Phi^{\mathfrak{D}}}{d\ell} = \gamma_r(\ell) + \varepsilon(\ell) \quad , \quad \ell \in (0,1) \quad , \tag{72}$$

où $\varepsilon(\ell)$ est indépendant de r . La longueur de l'arc est supposée inchangée. On peut voir que les déformations sont covariantes (g ne modifie pas (70) et (72) et d n'affecte pas b).

Nous considérerons le cas des grammaires probabilistes de déformation, et prendrons pour $\varepsilon(\ell)$ un processus stationnaire et markovien de moyenne 0 et de fonction de covariance $R(\lambda,\ell) = \alpha\, e^{-\beta|\ell-\lambda|}$; $\alpha,\beta > 0$.

Calculons la densité de probabilité conditionnelle de $\varepsilon(\ell)$. Pour cela, nous partirons d'un processus discret en divisant l'intervalle $(0,1)$ en n intervalles $\Delta\ell$ égaux délimités par les points $\ell_i = \frac{i}{n}$, $i = 0$ à n (on fera tendre par la suite n vers l'infini, soit $\Delta\ell = \ell_{i+1} - \ell_i = \frac{1}{n}$ vers 0). Plus précisément, les observations se faisant maintenant aux points ℓ_i , nous considérerons le processus de MARKOV discret, stationnaire, normal, de moyenne 0 , d'écart moyen centré quadratique $\sqrt{\alpha}$, et de coefficient de corrélation $\tilde{\rho} = e^{-\beta \Delta \ell} = e^{-\beta/n}$. Le processus étant de MARKOV, l'état du système en un point donné ne dépend que du précédent, et la loi étant gaussienne, la densité de probabilité conditionnelle qu'une observation (désignons-la par $\mathcal{E}$) $\mathcal{E}(\ell_{i+1}) = \mathcal{E}_{i+1}$ prenne la valeur ε_{i+1} lorsque $\mathcal{E}_i = \varepsilon_i$, est :

$$p(\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{2\pi(1-\tilde{\rho}^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha(1-\tilde{\rho}^2)}(\varepsilon_{i+1} - \tilde{\rho}\,\varepsilon_i)^2\right) .$$

Au total, et compte tenu de l'état initial ($\ell_o = 0$), la densité de probabilité conditionnelle de $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ est :

$$p = (\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{2\pi(1-\tilde{\rho}^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha(1-\tilde{\rho}^2)}(\varepsilon_{i+1} - \tilde{\rho}\,\varepsilon_i)^2\right) .$$

β) Si l'image pure était formée de n signes, il faudrait prendre en compte non seulement les déformations agissant sur la courbure de chaque signe, mais aussi celles qui agissent sur les conditions initiales. Il n'est plus enfin raisonnable de négliger les variations de longueur des arcs. On pourra supposer toutes ces déformations mutuellement indépendantes et procéder comme on l'a fait dans le cas d'un signe isolé.

b.2. Structures différentielles.

Les structures différentielles ne se distinguent des structures euclidiennes que par la façon dont on définit les signes et par la plus grande variété possible des transformations de similitude.

Supposons que les signes purs d'un même type σ soient définis par l'équation différentielle explicitée en y' :

$$y' = f_\sigma(x,y) \quad , \tag{74}$$

auxquels il faut rajouter la détermination des extrémités des arcs. Nous prendrons, comme en 1., pour définition des signes déformés, l'équation (où pour alléger l'écriture nous laissons y au lieu de mettre y^x).

$$y' = f_\sigma(x,y) + \varepsilon(x,y) \quad , \tag{75}$$

où ε sera un processus stochastique tel que la mesure de probabilité de l'élément linéaire différentiel dans (75), et plus précisément de $y' = f_\sigma + \varepsilon$ soit G-invariante. Alors les déformations seront covariantes en probabilité. Dans l'exemple (69), on prendrait

$$y' = h(\frac{y}{x}) + \varepsilon(\frac{y}{x}) \quad .$$

On procéderait ensuite dans le même esprit que pour les structures euclidiennes.

c. Fonction de reconnaissance.

Nous ne considérerons que le cas des structures euclidiennes et d'un signe isolé. Nous maximiserons le rapport classique de vraisemblance de la densité de probabilité du bruit seul $p(\vec{\varepsilon})$ à la densité de probabilité $p(\vec{\Psi})$ du signal plus le bruit, où $\Psi = (\frac{d\Phi}{d\ell})$. Soit

$$\ell_n = \frac{p(\vec{\varepsilon})}{p(\vec{\Psi})} = \frac{p(\overrightarrow{\Psi - \gamma_r})}{p(\vec{\Psi})} \tag{76}$$

ce rapport. Cela revient à maximiser $p(\vec{\varepsilon})$. On affecte à l'image observée, la structure pure qui donne la plus grande probabilité de déformation.

Calculons ce rapport de vraisemblance ℓ_r . On a, compte tenu de (73) :

$$\ell_r = \exp \frac{1}{2\alpha}\{2(\gamma_r)_o \Psi_o - (\gamma_r)_o^2$$

$$+ \frac{1}{1-e^{-2\beta/n}} \sum_{r=0}^{n-1} \left(2((\gamma_r)_{i+1} - e^{-\beta/n}(\gamma_r)_i)(\Psi_{i+1} - e^{-\beta/n}\Psi_i)\right. \qquad (77)$$

$$\left. - ((\gamma_r)_{i+1} - e^{-\beta/n}(\gamma_r)_i)^2\right\} \quad .$$

Faisons maintenant tendre n vers l'infini : ℓ_r tendra vers

$$L_r = \exp \frac{1}{2} A_r \quad , \qquad (78)$$

où

$$A_r = \frac{1}{\alpha}\left(2\gamma_r(o)\Psi(o) - \gamma_r^2(o)\right) + \frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1 \left(\beta\gamma_r(\ell)+\gamma_r'(\ell)\right)\left(\beta\Psi(\ell)+\Psi'(\ell)\right) d\ell$$

$$- \frac{1}{2\alpha\beta}\int_0^1 \left(\beta\gamma_r(\ell)+\gamma_r'(\ell)\right)^2 d\ell \quad ,$$

soit,

$$A_r = \frac{1}{\alpha}\left(2\gamma_r(o)\Psi(o) - \gamma_r^2(o)\right) + \frac{1}{\alpha\beta}\left[\left(\beta\gamma_r(\ell)+\gamma_r'(\ell)\right)\Psi(\ell)\right]_o^1$$

$$- \frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1 \left(\beta\gamma_r'(\ell)+\gamma_r''(\ell)\right)\Psi(\ell)\, d\ell + \frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1 \left(\beta^2\gamma_r(\ell)+\beta\gamma_r'(\ell)\right)\Psi(\ell)\, d\ell$$

$$- \frac{1}{2\alpha\beta}\int_0^1 \left(\beta\gamma_r(\ell)+\gamma_r'(\ell)\right)^2 d\ell$$

$$= \frac{\Psi(o)}{\alpha}\left(\gamma_r(o) - \frac{1}{\beta}\gamma_r'(o)\right) + \frac{\Psi(1)}{\alpha}\left(\gamma_r(1) + \frac{1}{\beta}\gamma_r'(1)\right) - \frac{1}{\alpha}\gamma_r^2(o)$$

$$+ \frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1 \left(\beta^2\gamma_r(\ell) - \gamma_r''(\ell)\right)\Psi(\alpha)\, d\ell - \frac{1}{2\alpha\beta}\int_0^1 \left(\beta\gamma_r(\ell) + \gamma_r'(\ell)\right)^2 d\ell \qquad (79).$$

On voit que A_r est une fonction linéaire de trois qu ntités :

$$a_r^{(o)} = \Psi(o) \quad ,$$

$$a_r^{(1)} = \Psi(1) \quad ,$$

$$a_r = \int_0^1 \left(\beta^2 \gamma_r(\ell) - \gamma_r''(\ell) \right) \Psi(\ell) \, d\ell \quad . \qquad (80)$$

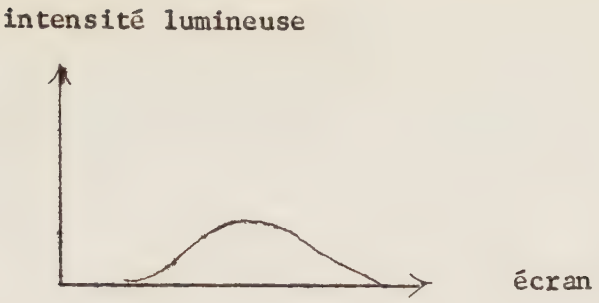
La procédure de reconnaissance s'effectuera à l'aide de ces trois sondages : les deux premiers sont des mesures locales se rapportant aux extrémités du segment curviligne constituant le signe, le troisième est une mesure globale. Si les déformations sont très irrégulières le long du signe, β aura une grande valeur (faible corrélation) et (80) montre que c'est la troisième quantité a_r qui sera la plus significative pour des buts de reconnaissance. Quoi qu'il en soit, pour maximiser L_r , on calcule simplement A_r pour les valeurs observées Ψ , et on choisit celle des structures $\mathcal{P}_r$ pour laquelle A_r prend la plus grande valeur.

3.5. Structures de contraste.

Les structures curvilignes peuvent être considérées comme des structures idéalisées. Les structures réelles ont une certaine épaisseur, remplissent une certaine surface (dans R^2) . Or, ces surfaces se présentent de différentes façons, et essentiellement avec des cont ours nets ou avec des contours estompés, c'est à dire avec passage tranché ou avec passage en dégradé de l'image au fond sur lequel elle apparait. Ces dernières structures sont les structures de contraste, et sont d'une assez grande généralité pour en englober d'autres.

a. Grammaire des images pures.

L'image possède des zones d'ombres et des zones de lumière ; elle apparait comme une variation continue d'intensité lumineuse sur un écran de projection.



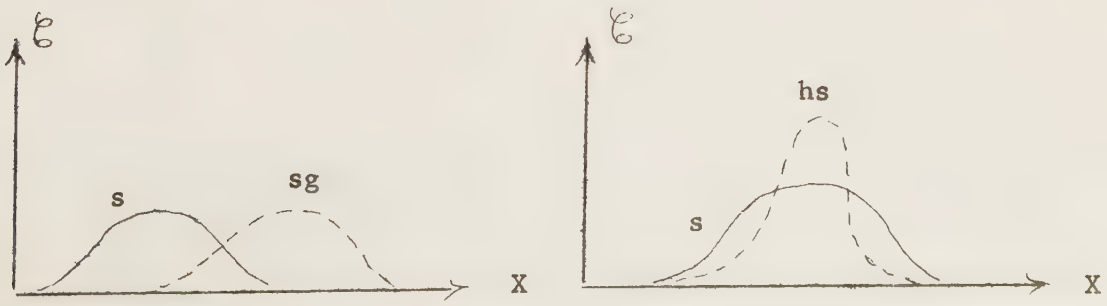
L'écran jouera le rôle d'un espace de fond (ou d'arrière plan) et l'image se présentera par une fonction numérique ayant une valeur en chaque point de l'écran.

On définira donc d'une façon générale d'un ensemble X, l'espace de fond (ou arrière plan), et un semi-groupe $\mathcal{C}$, l'espace des contrastes. Les signes seront des fonctions appliquant X dans $\mathcal{C}$:

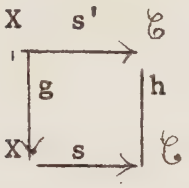
$$s = s(x) \quad , \quad x \in X \quad , \quad s \in \mathcal{C} \quad . \tag{81}$$

Spécifier que $\mathcal{C}$ est un semi-groupe revient à préciser que la loi de composition sur $\mathcal{C}$ est associative, ce qui semble naturel dans l'exemple de l'intensité lumineuse. On peut postuler l'existence d'un élément neutre dans $\mathcal{C}$, l'absence de lumière.

Les transformations de similitude agissent d'habitude sur les signes. Elles devraient donc appliquer $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. Mais on peut d'abord vouloir conserver les rapports d'intensité relatifs, et seulement changer la forme des courbes d'égale luminosité, donc distordre l'espace des X : on définira donc des transformations g appliquant X sur X. Si l'on veut aussi faire varier les rapports d'intensité, c'est à dire les contrastes entre les différents points de l'image, on définira des transformations $h \in H$ appliquant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}$.



En résumé, nous définirons un groupe G de transformations de similitude de l'espace de fond, et un groupe H de transformations de contrastes ; deux signes s(x) et s'(x) seront semblables si :



$$s'(x) = h\big(s(g(x))\big), \forall x \in X, \forall g \in G, \forall h \in H . \qquad (82)$$

Les transformations de similitude $\tilde{g} = (g,h)$ des signes seront données par le produit direct $\tilde{G} = G \times H$; G et H étant des groupes, G sera un groupe (*) .

Les types devront évidemment être invariants par rapport à $\tilde{G}$, et n'avoir aucun signe en commun.

En résumé, on a le modèle suivant pour les grammaires de structures de contraste :

(i) Soit un ensemble X , l'espace de fond, et un semi-groupe $\mathfrak{E}$, l'espace des contrastes. Les signes s seront des fonctions $s : X \to \mathfrak{E}$ appliquant X dans $\mathfrak{E}$: $s = s(x) , \forall x \in X , \forall s \in \mathfrak{E}$;

(ii) si G est un groupe de transformations g appliquant X sur X , et si H est un groupe de transformations, dites de contraste, appliquant $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}$, on définit la similitude de deux signes s , $s' \in \mathfrak{E}$ par la relation (82) , et les transformations de similitude $\tilde{g} = (g,h)$ des signes appartiennent au groupe produit direct $\tilde{G} = G \times H$;

(iii) la loi de composition des signes est l'opération binaire dans $\mathfrak{E}$ et sera notée additivement ; une configuration sera de la forme :

$$c(x) = s_1(x) + \ldots + s_n(x) , \forall x \in X ; \qquad (83)$$

(*) Si l'on voulait passer directement de s à s' , par une seule transformation appliquant $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{E}$, c'est à dire mettre s' sous la forme $s' = \hat{g}s$, il faudrait supposer que $\mathfrak{E}$ est un groupe ; on aurait alors $\hat{g} = hs\, gs^{-1}$ et $\hat{g}s = hsg$.

(iv) deux configurations c et c' seront identifiées (cRc') si :

$$s_1(x) + \ldots + s_n(x) = s'_1(x) + \ldots + s'_n(x') \ , \ \forall x \in X \ ; \qquad (84)$$

(v) les images I seront des fonctions $I : X \to \mathcal{C}$;

(vi) si les transformations synonymes s'identifient à $\tilde{G}$, et sont donc du type $I'(x) = h\big(I(g(x))\big)$, les classes d'équivalence résultantes sont appelées structures de contraste.

Exemple 4.

Prenons pour espace de fond X le plan $X = R^2$, et pour espace de contraste $\mathcal{C}$ l'espace tri-dimensionnel $\mathcal{C} = R^3$. Etant donné une suite infinie de fonctions linéairement indépendantes positives $f_i(x_1,x_2)$ de $L^2(X)$, un signe sera de la forme :

$$s_i = (c_{i_1} f_{i_1} , c_{i_2} f_{i_2} , c_{i_3} f_{i_3}) \ , \qquad (85)$$

où c_{i_1} , c_{i_2} , c_{i_3} sont des constantes réelles et positives arbitraires.

Le groupe G des transformations g sur X sera défini par :

$$g : \begin{cases} x'_1(x_1,x_2) = x_{10} + \lambda(x_1 \cos \Phi + x_2 \sin \Phi) \ , \\ x'_2(x_1,x_2) = x_{20} + \lambda(-x_1 \sin \Phi + x_2 \cos \Phi) \ , \end{cases} \qquad (86)$$

où x_{10} , x_{20} , $\lambda(> 0)$ et Φ sont des constantes réelles arbitraires. Cela représente un déplacement (translation, rotation) conjugué avec une homothétie. Le groupe H des transformations h de contraste sur $\mathcal{C}$ sera défini par :

$$h : \begin{cases} y'_1 = \gamma_1 y_1 \ , \\ y'_2 = \gamma_2 y_2 \ , \\ y'_3 = \gamma_3 y_3 \ , \end{cases} \qquad (87)$$

où y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$, et où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des constantes réelles et positives arbitraires (cela représente des dilatations différentes suivant les axes Y_1, Y_2, Y_3).

La transformée de s_i sera :

$$s'_i = (\gamma_1 \, c_{i_1} \, f_{i_1}(x'_1, x'_2) \, , \, \gamma_2 \, c_{i_2} \, f_{i_2}(x'_1, x'_2) \, , \, \gamma_3 \, c_{i_3} \, f_{i_3}(x'_1, x'_2)) \quad (88)$$

Les signes seront liés entre eux par l'addition vectorielle, soit :

$$s_i + s_j = (c_{i_1} \, f_{i_1} + c_{j_1} \, f_{j_1} \, , \, c_{i_2} \, f_{i_2} + c_{j_2} \, f_{j_2} \, , \, c_{i_3} \, f_{i_3} + c_{j_3} \, f_{j_3}) \, , \quad (89)$$

si bien que les images $I(x)$ seront des fonctions définies sur R^2 et à valeurs dans R^3.

Si l'on interprète les trois composantes de $I(x)$ comme étant les longueurs d'ondes de trois couleurs de base, on aura donné un modèle de structures colorées dans le plan pour un processus d'impression en trois couleurs.

Si la transformation de synonymie se réduit à la transformation de similitude (c'est à dire à (88)) et si $\lambda = 1$ (ce qui supprime l'homothétie), deux images d'une même structure se distinguent par des colorations différentes (mais non par une déformation géométrique du sujet).

Nous avons dit que les structures de contraste englobaient d'autres structures comme cas particuliers. Donnons quelques illustrations.

Application 1 aux structures de surfaces.

Les structures de contraste englobent naturellement les structures à contours nets. Il suffit de bloquer l'intensité lumineuse à une valeur constante sur l'image, à 0 ailleurs. On prendra donc pour X l'ensemble $\mathcal{I}$ des images de la structure de surfaces $\mathcal{P}_S$ considérée, et pour $\mathcal{E}$ l'ensemble $\{0,1\}$. La loi de composition dans X sera la superposition. La loi de composition dans $\mathcal{E}$ sera l'addition binaire (0+0 = 0.0+1 = 1+0 = 1+1 = 1). Les signes s_ξ dans la structure de contraste seront définis à

partir des signes s_S de $\mathcal{P}_S$, et plus généralement les images $\mathcal{I}_\mathcal{E}$ à partir des images I_S. On définira donc $I_\mathcal{E}$ par :

$$I_\mathcal{E}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si} \quad x = I_S \ , \\ 0 & , \quad \text{sinon.} \end{cases} \tag{90}$$

(c'est l'indicatrice de l'image).

Si G est le groupe des transformations de similitude (et les transformations de synonymie si on les identifie) deux images $I_\mathcal{E}$ et $I'_\mathcal{E}$ seront synonymes si et seulement si il existe un g tel que :

$$I'(x) = I(gx) \ , \ \forall x \in X \ , \tag{91}$$

(h=1).

Application 2 aux structures de permutation $\mathcal{P}_p$.

Reprenons l'exemple des graphes non orientées. Les signes s_p sont des arêtes (i,j), que nous écrirons $(s_p)_{ij} = (ij)$, où les indices i et j sont pris dans un ensemble $E = \{1,\ldots,n\}$. L'espace de fond sera $X = E \times E$. La loi de composition dans X sera la superposition. L'espace des contrastes sera comme dans l'application 1. Soit

$I_p = (s_p)_{ij} + (s_p)_{k\ell} + \ldots = (ij,k\ell,\ldots)$ une image de la structure de permutation.

On définira $\mathcal{I}_\mathcal{E}$ par

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = I_p = (s_p)_{ij} + (s_p)_{k\ell} + \ldots = (ij,k\ell,\ldots) \ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{92}$$

Reppelons que deux images I_p et $I_{p'}$ de $\mathcal{P}_p$ sont semblables (ou synonymes si la synonymie se réduit à la similitude) s'il existe une permutation $g \in G$ de E dans E, les transformant l'une dans l'autre ; c'est à dire qu'à la permutation g, telle que $E \overset{g}{\to} E'$, il correspond $ij \overset{g}{\to} i'j'$, $k\ell \overset{g}{\to} k'\ell'$, ..., d'où $I_p \overset{g}{\to} I_{p'}$. On écrit $I_{p'} = gI_p$. Il s'ensuit que deux images seront semblables si :

$$I_\mathcal{E}(x) = I_\mathcal{E}(gx) \ , \forall x \in X \ . \tag{93}$$

Application 3 aux structures groupales.

Nous avons dit que partant d'un ensemble de silhouettes m_j données, une image I_S était fonction des transformations g_j uniquement, soit :

$$I_S = I_S(g_1, g_2, \ldots) \quad . \tag{94}$$

Autrement dit, I_S peut être représenté par une fonction I appliquant G dans $\mathcal{J}$. On peut alors prendre pour espace de fond X l'espace G, et comme espace de contraste $\mathcal{E}$ (qui est l'espace des images dans les structures de contraste) l'espace $\mathcal{J}_S$, dont l'espace des images lui-même.

La loi de composition dans X est la loi de composition externe des signes s_S, c'est à dire des images I_S. La loi de composition (de semi-groupe) dans $\mathcal{E}$ est la loi de composition interne des images I_S, et deux images seront semblables si $I(g'_1, g'_2, \ldots) = I(gg_1, gg_2, \ldots)$.

b. Grammaire de déformations.

On peut distinguer plusieurs cas : celui ou seulement l'espace de fond est affecté par la déformation ; celui où l'espace de contraste est seul déformé ; enfin celui où les 2 sont affectés simultanément. Si dans ce dernier cas les déformations sont stochastiquement indépendantes, on est renvoyé sur les 2 premiers.

Supposons pour l'instant que l'arrière plan seul est déformé. On distinguera ici aussi entre une déformation entière de l'image et une déformation de chaque signe indépendamment l'un de l'autre. Définissons un espace Ξ d'applications ξ de X dans lui-même. Les déformations seront définies par

$$d : I = I(x) \to I^{\mathcal{D}} = I\big(\xi(x)\big) \quad . \tag{95}$$

Si l'image pure I est formée de n signes $s_1 = s_1(x)$, $s_2 = s_2(x)$, ..., $s_n = s_n(x)$, on prendra n versions indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de l'application ξ, et on définira l'image déformée par la configuration

$$I^{\mathcal{D}} = \big(s_1(\xi_1(x)) \ , \ s_2(\xi(x)) \ , \ldots, \ s_n(\xi_n(x))\big) \quad . \tag{96}$$

Supposons maintenant que les déformations affectent l'espace de contraste seulement. Soit $\mathcal{Z}$ un ensemble d'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. On introduira les déformations par

$$d : I = I(x) \to I^{\mathcal{D}} = z\big(I(x)\big) \quad ,$$

(on peut remarquer que ξ et z agissent comme g et h).

Si l'image pure I était formée de n signes, on aurait de façon analogue à (96).

$$I^{\mathcal{D}} = \big(z_1(s_1(x)) \ , \ z_2\ (s_2(x)) \ , \ldots , \ z_n(s_n(x))\big) \quad . \tag{98}$$

Dans les deux cas (95) et (97), on peut introduire une mesure de probabilité P sur Ξ ou sur $\mathcal{Z}$ (ou avec (96) et (98), une mesure produit sur Ξ^n ou sur $\mathcal{Z}^n$. On aura des grammaires probabilistes de déformation.

En ce qui concerne les grammaires métriques, il s'agit de définir une distance sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Nous allons le faire sur un exemple, celui des structures cycliques qui peuvent être considérées comme des structures de contraste. L'espace de fond est $X = \{1,2,\ldots,n\}$, l'espace des contrastes $C = R^1$. Supposons que z_i consiste en

$$s_i^{\mathcal{D}} = s_i + z_i \quad , \tag{99}$$

où z_i est un nombre réel (voir 3.1.b.). Si $z(x)$ forme un processus gaussien de moyenne zéro et de matrice de covariance (définie positive) R, on peut prendre comme distance :

$$\delta(I,I^{\mathcal{D}}) = \big((I-I^{\mathcal{D}})\ R^{-1}(I-I^{\mathcal{D}})\big)^{1/2} \quad . \tag{100}$$

Désignons par z le vecteur colonne

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad . \tag{101}$$

La matrice de covariance a pour expression

$$R = \overline{zz^T} - \bar{z}\,\overline{z^T} = \overline{zz^T} \quad , \tag{102}$$

où T est l'indice de transposition et $\overline{zz^T}$ la moyenne de zz^T ; si bien que :

$$(I, I^{\mathcal{D}}) = (z^T(\overline{zz^T})^{-1}\, z)^{1/2} \quad . \tag{103}$$

Si $R = 0$, on prendra pour R^{-1} la valeur du pseudo-inverse de R , soit la matrice nulle. Si R est une matrice cyclique la métrique définie par (100) ou (103) est G-invariante.

c. Fonction de reconnaissance.

Reprenons l'exemple précédent. Soit I_r le prototype de la structure $\mathcal{P}_r$. Toutes les images semblables à I_r seront de la forme gI_r . La reconnaissance par distance minimum consistera à minimiser $\delta(gI_r , I^{\mathcal{D}})$ sur toutes les structures $\mathcal{P}_r$. Elle se confond (par la façon même dont on a défini δ) avec la reconnaissance par maximum de vraisemblance. Explicitons $\delta^2(gI_r , I^{\mathcal{D}})$. On a :

$$\delta^2(gI_r , I^{\mathcal{D}}) = ||gI_r||^2 - 2(gI_r, I^{\mathcal{D}}) + ||I^{\mathcal{D}}||^2 , \tag{104}$$

où $||.||$ est la norme quadratique associée à la matrice R^{-1} , et où $(,)$ est le produit scalaire luiaussi associé à la matrice R^{-1} . La reconnaissance par distance minimum consiste donc à trouver la valeur de r pour laquelle $\min_g \delta^2(gI_r, I^{\mathcal{D}})$ est min, c'est à dire à résoudre le problème $\min_{r,g} \delta^2(gI_r, I^{\mathcal{D}})$. Si la matrice R est cyclique $||gI_r||$ est invariant, si bien que $||gI_r|| = ||I_r||$. Si par ailleurs tous les prototypes ont même norme $||I_r||$ et $I^{\mathcal{D}}$ étant donné, la reconnaissance par distance minimum se résoud en une reconnaissance par produit scalaire maximum : $\max_{r,g} (gI_r, I^{\mathcal{D}})$.

DEUXIEME PARTIE

AUTOMATES FINIS ET PROBLEMES DE RECONNAISSANCE

Nous supposerons dans cette partie que l'on peut exhiber une description grammaticale de l'image observée, autrement dit que celle-ci est composée de signes (ou de mots, ou d'éléments de mots) qui ont déjà été identifiés, et que l'agencement de ces signes répond à certaines règles. L'analogie avec la Première Partie est évidente. Ces règles ne seront pas plus explicitées qu'au Chapitre 1 (on ne se donnera donc pas des grammaires particulières) ; elles seront néanmoins définies comme des applications d'un espace dans un autre espace, et on pourra en préciser la forme générale (on se rattachera donc à des types de grammaires).

Si l'on voulait considérer les images ou structures les plus différentes, probablement serait-on dans la nécessité, pour les analyser, de faire appel à une infinie variété de types de grammaires. Il suffit déjà de dire que les grammaires formelles usuelles, comme les grammaires contextuelles, context-free, ou régulières (finite-state grammars) que l'on pourrait qualifier d'unidimensionnelles, ne sont pas des intermédiaires naturels pour la description des images bidimensionnelles. Il faut noter cependant que les grammaires unidimensionnelles permettent de décrire (naturellement ou non, aisément ou non) un grand nombre de structures, qu'elles sont les plus couramment utilisées, et que la connaissance intime qu'on en a,offre, la seule voie pratique actuellement d'approcher les problèmes de langages plus complexes (langages graphiques, par exemple). C'est dire l'intérêt qu'il y a lieu d'accorder à ces types de grammaires. Nous ne nous occuperons dans ce qui suit que de grammaires unidimensionnelles.

Or, le but d'une grammaire est de spécifier des règles qui conduisent à la construction d'un mot bien formé, d'une phrase correcte (peut-être sans

signification) : on peut parler de grammaire générative, en ce sens qu'elle engendre un langage. A l'opposé, si l'on détient ce langage et que l'on cherche à analyser la phrase, en somme que l'on s'intéresse à un problème de reconnaissance, on parlera d'automates (ou plus généralement de machines) qui sont des appareils formalisant le processus même d'analyse. Mais il faut bien se rendre compte que ce sont les deux faces d'un même concept ; seul le point de vue change : composer une phrase dans un cas, la décomposer dans l'autre. Si bien qu'à chaque grammaire on peut associer une machine qui accepte, c'est-à-dire qui reconnaisse une phrase écrite au moyen de cette grammaire. Ainsi associe-t-on à la classe des langages récursivement énumérables ou à la classe la plus générale des systèmes combinatoires les machines de TURING, aux grammaires contextuelles les automates à mémoire linéairement bornée, aux grammaires context-free les automates à piles de mémoires, et aux grammaires régulières les automates finis. Nous nous intéresserons donc ici aux automates, ou aux machines.

Les problèmes que l'on peut se poser sont alors les suivants. Le premier évidemment est de réaliser un algorithme de reconnaissance de structures définies ; c'est le plus immédiatement concret, mais aussi le moins général, à chaque type de structures particulières correspondant un algorithme particulier. Nous n'envisagerons pas ce genre de problèmes dans ce cours et renvoyons à ce sujet sur la littérature existante (voir entre autres références : R.A. KIRSCH [19], R. NARASHIMAN [32] et [33], H.E. KULSRUD [22], T.G. EVANS [9], R.B. BANERJI [2], R. CLERICI, A. GRASSELLI, G. LEVI, A. MARTELLI, U. MONTANARI, F. SIROVICH [5]). Un autre problème est de savoir si pour une grammaire donnée on peut construire des processus de reconnaissance, ou encore si l'ensemble des phrases ou des images reconnues par un automate n'est pas vide. C'est l'analogue des problèmes d'existence en mathématiques, que l'on doit résoudre dès lors que l'on se propose de concevoir une grammaire. Il est d'autres questions fondamentales que l'on peut se poser, par exemple : comment caractériser les ensembles reconnus ; l'appartenance à une classe de langages (dont on sait qu'ils sont acceptés par des automates) est-elle préservée par différentes opérations, etc... C'est de ces derniers points de vue que nous nous placerons, et ce sont ces derniers problèmes qui seront au centre de cette partie.

Parmi les divers types d'automates, nous nous sommes restreints à l'étude des automates finis. Ce n'est pas qu'ils peuvent reconnaître même la majorité des structures observables : bien au contraire, on a pu remarquer que les contraintes des grammaires context-free ressemblent à celles que l'on imagine dans les organismes vivants, alors que les contraintes des grammaires régulières se trouvent dans les motifs cristallins. Ce n'est pas non plus que les algorithmes de reconnaissance utilisés procèdent tous de grammaires régulières : certains procèdent de grammaires context-free. Mais, d'une part, les automates finis dont les mécanismes sont simples et sans mémoire infinie, sont une bonne approximation de l'idée que l'on a des machines existantes, donc des processus de reconnaissance, d'autre part et surtout un certain nombre de problèmes indécidables dans le cas des machines de TURING ou des automates à piles de mémoires, sont ici décidables. Ainsi on peut décider si oui ou non un automate fini accepte un langage non vide, si oui ou non un automate fini accepte un langage infini, et si oui ou non deux automates finis sont équivalents.

Cette partie, pour laquelle nous avons suivi M.O. RABIN et D. SCOTT [40], M.O. RABIN [39], et S. GINSBURG [12], sera divisée en trois chapitres : le Chapitre 4 qui s'attachera à la caractérisation des ensembles réguliers, soit des ensembles reconnus par un automate fini ; le Chapitre 5 qui traitera essentiellement des deux problèmes de la non vacuité des ensembles réguliers et de l'équivalence des automates finis ; enfin, le Chapitre 6 qui envisagera d'autres processus de reconnaissance, c'est-à-dire d'autre types d'automates finis que celui - le plus simple - qui avait servi de support aux deux chapitres précédents.

CHAPITRE 4

AUTOMATES FINIS

Avant d'étudier les automates finis, et pour mieux les situer, nous avons inclus en début un paragraphe de généralités sur les grammaires et les automates.Nous ne nous occuperons ensuite dans ce chapitre - et dans le chapitre suivant - que de ces automates finis dont le mécanisme de fonctionnement est le plus simple (à un ruban, à mouvement dans un seul sens, etc...). On peut néanmoins les diviser en deux catégories que nous prendrons en compte : les automates déterministiques et les automates non déterministiques (ce qui ne veut pas forcément dire, comme nous le verrons, probabilistes). Un automate est défini par ses règles de fonctionnement, mais il est fondamentalement caractérisé (et particulièrement en ce qui nous concerne) par les ensembles qu'il reconnaît ou qu'il accepte ; ce sera l'objet des deux derniers paragraphes.

4.1. Généralités sur les grammaires et les automates

Nous avons dit en introduction à la Deuxième Partie que l'on pouvait associer grammaires et automates. Il suffit en effet de considérer qu'un automate fonctionnant normalement en reconnaissance, soit en automate examinateur, puisse fonctionner en production, soit en automate générateur. Il engendrerait alors un langage (avec la grammaire que ce langage sous-tend) accepté par l'automate examinateur. Nous donnerons donc cette correspondance grammaires-automates, et pour rendre plus sensible la notion d'automate, nous montrerons le fonctionnement d'un automate fini déterministique.

a. Grammaires formelles

Nous allons partir d'une ensemble fini $\sum$ de symboles que l'on appellera alphabet ou vocabulaire, et de l'ensemble $\sum^*$ de toutes les suites ou séquences x de longueur finie de ces symboles, en y incluant

la suite Λ de longueur nulle. Un langage L (formel ou naturel) est un sous-ensemble de $\sum^*$: c'est l'ensemble des mots, ou des phrases, ou des configurations auxquels on attache une signification (ou plus modestement syntaxiquement corrects). La simple énumération des éléments de L ne suffit pas à définir le langage. Il faut, pour ce faire, fixer un certain nombre de règles d'assemblage ou de composition, en somme de règles grammaticales des mots $x \in L$. Ce sont des contraintes liant les mots, qui permettent ou outre d'engendrer le langage : une grammaire est une spécification récursive d'un langage.

D'une façon plus précise, une grammaire formelle est définie par la donnée d'un vocabulaire fini dit terminal $\sum$, d'un vocabulaire fini dit auxiliaire ou non-terminal S servant dans l'écriture des productions (ou règles grammaticales), ces deux ensembles étant disjoints, d'un symbole initial ou axiome $s_o \in S$ permettant de démarrer le processus d'énumération effective du langage par les règles de production, enfin d'un ensemble fini R de règles finies ou productions.

On notera une grammaire

$$G = \langle S, \sum, R, s_o \rangle .$$

Le langage L(G) engendré par une grammaire G est l'ensemble des mots de $\sum^*$ que l'on peut obtenir par application des règles R de G en commençant par mettre en jeu l'axiome.

Dans la hiérarchie de CHOMSKY, on distingue :

1°) Les ensembles récursivement énumérables où les productions sont de la forme

$$\alpha \longrightarrow \beta$$

(la flèche s'interprétant par : est réécrit), où $\alpha \in (S \cup \sum)^* S (S \cup \sum)^*$ et $\beta \in (S \cup \sum)^*$.

2°) Les grammaires contextuelles où les productions sont de la forme

$$\varphi_1 A \varphi_2 \longrightarrow \varphi_1 \omega \varphi_2 ,$$

où $A \in S$, $\varphi_1, \varphi_2, \omega \in (S \cup \Sigma)^*$; dans le contexte que forment φ_1 à gauche et φ_2 à droite, le symbole non terminal A est réécrit ω.

3°) Les grammaires context-free (ou de CHOMSKY) où les productions sont de la forme

$$A \longrightarrow \beta$$

4°) Les grammaires régulières (ou finite-state grammars, ou linéaires à droite, ou de KLEENE) où les productions sont de la forme

$$A \longrightarrow aB,$$
$$A \longrightarrow a,$$

où $A, B \in S$ et $a \in S \cup \{\Lambda\}$. On définirait de même des grammaires linéaires à gauche. Les règles $A \longrightarrow a$ sont des règles lexicographiques ou terminales, et permettent de terminer les phrases.

On définirait des classes intermédiaires comme par exemple les langages de programmation. On pourrait également considérer des extensions diverses. Il n'importe : cette hiérarchie par les productions situe parfaitement les grammaires régulières.

Montrons, pour terminer sur un exemple, la construction d'une phrase à l'aide de la grammaire :

$$S = \{A,B\}, \quad \Sigma = \{a,b\}, \quad s_o \in A,$$

$$R : \left| \begin{array}{l} A \longrightarrow aA, \\ A \longrightarrow bB, \\ B \longrightarrow bB, \\ B \longrightarrow b.. \end{array} \right.$$

Cette grammaire, qui est une grammaire régulière, énumère le langage formé d'une suite de a suivie d'une suite de b. On a en effet :

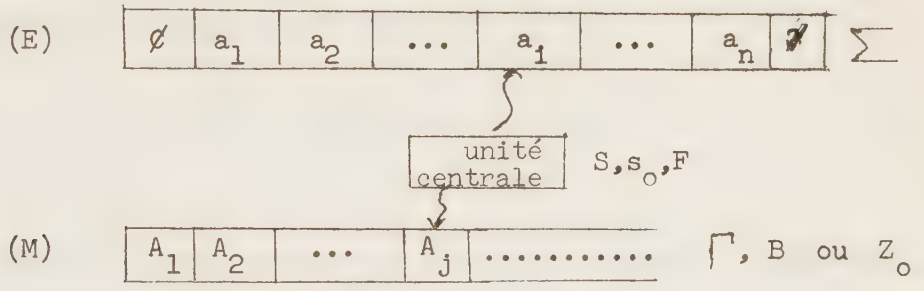
$$A \longrightarrow a\,A \longrightarrow a\,aA \longrightarrow \ldots \longrightarrow a^m A \longrightarrow a^m bB \longrightarrow \ldots \longrightarrow a^m b^{n-1} B \longrightarrow a^m b^n.$$

d'où : $L(G) = \{a^m b^n \; ; \; m \geqslant 0, \quad n \geqslant 2\}$.

b. Machines et automates

Comme un automate fonctionnant en production engendre un langage, on retrouvera dans l'automate examinateur, c'est-à-dire dans l'automate tout court, les mêmes entités S, $\sum$, R, s_o que nous avons définies précédemment. A cela, deux différences : la première est que les règles R doivent être transcrites de façon appropriée ; nous les représenterons par une application δ, dite fonction d'état suivant ou fonctior de transition. La seconde différence est qu'un automate formalise un processus mécanique, et qu'il fait par conséquent spécifier un mode de fonctionnement : celui-ci fera appel à des symboles supplémentaires.

Sous sa forme la plus générale, un automate est constitué d'un ruban (ou bande)d'entrée, d'une unité centrale dite encore organe de calcul ou organe de contrôle,, enfin d'une mémoire. Le ruban d'entrée est divisé en cases dans lesquelles ne figure qu'un seul symbole et est limité par des marqueurs. L'unité centrale peut prendre un nombre fini d'états internes et possède une tête de lecture du ruban d'entrée et une tête de lecture - écriture-effacement de la mémoire. Cette dernière est finie ou infinie et est généralement représentée par un ruban de mémoire limité à gauche et également divisé en cases dans lesquelles ne figure qu'un seul symbole.



L'automate n'est susceptible que de mouvements élémentaires se faisant d'après l'état interne de l'unité centrale, le symbole lu sur le ruban d'entrée et les informations fournies par la mémoire. Lors d'une de ces phases, il peut changer l'état interne de l'unité centrale, déplacer la tête de lecture du ruban d'entrée d'une case à droite ou à gauche ou la laisser fixe, modifier l'état de la mémoire finie ou infinie en suivant des procédures de description finies. Au début du fonctionnement l'unité

centrale est dans un état donné : l'état initial.

Suivant que le ruban d'entrée peut se déplacer dans les deux sens ou dans un seul sens (auquel cas le ruban défile de la droite vers la gauche, la tête de lecture lit le ruban de la gauche vers la droite), l'automate est dit à mouvement dans les deux sens ou à mouvement dans un sens. Lorsque, dans un état donné, l'automate a le choix entre un nombre fini d'évolutions possibles, il est dit non-déterministique ; s'il n'a qu'une possibilité d'évolution, il est dit déterministique. Enfin, on notera $\not\subset$ et $\not\supset$ les marqueurs gauche et droite du ruban d'entrée et on admettra - sauf mention expresse - qu'ils ne font partie d'aucun alphabet ou vocabulaire.

On pourrait considérer d'autres variantes d'automates, comme les automates à plusieurs rubans d'entrée : nous en parlerons au Chapitre 6.

Etablissons alors, en correspondance avec la hiérarchie des grammaires, une hiérarchie des automates. Ces classes différentes d'automates se distingueront essentiellement par leur structure de mémoire et par la définition de leurs fonctions de transition.

1) Les machines de TURING et plus précisément les machines de Turing non-déterministiques et à mouvement dans les deux sens, ont un ruban mémoire infini et se représentent par le système

$$M = \langle S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, B, F \rangle,$$

où

S est l'ensemble fini des états internes de la machine, c'est-à-dire de l'unité centrale,

Σ est le vocabulaire fini d'entrée ;

Γ est le vocabulaire fini au moyen duquel l'unité centrale écrit sur la mémoire, et peut inclure Σ ;

δ est la fonction de transition ;

$s_o \in S$ est l'état initial de l'unité centrale ;

$B \in \Gamma$ est le blanc et figure dans les cases inoccupées (il limite à gauche et à droite l'ensemble des phrases sur le ruban mémoire ; on peut réserver à Λ le rôle d'effacement) ;

$F \subseteq S$ est l'ensemble des états dits finals de l'unité centrale, et sert à délimiter les langages reconnus par la machine.

Enfin, la fonction $\varsigma(s,a,X) \in \{(t,Y,d_1,d_2),(\ldots),\ldots\}$, où $s,t \in S$, $a \in \Sigma \cup \{\emptyset,\not\emptyset\}$, $X \in \Gamma$, $Y \in \Gamma - \{B\}$, $d_1,d_2 \in \{-1,0,1\}$, est une application de $S \times (\Sigma \cup \{\emptyset,\not\emptyset\}) \times \Gamma$ dans $S \times (\Gamma - \{B\}) \times \{-1,0,1\} \times \{-1,0,1\}$. Elle traduit le fonctionnement ci-après : l'unité centrale étant dans l'état s, et lisant a sur le ruban d'entrée et X sur le ruban mémoire, passe (dans la première option) à l'état t, écrit Y sur le ruban mémoire à la place de X, et déplace ses têtes de lecture des rubans d'entrée et mémoire d'une case vers la gauche ou la droite ou ne les déplace pas suivant que d_1 et d_2 prennent les valeurs -1, $+1$ ou 0. Dans l'état initial, $s = s_o$ et $a = \emptyset$ et le ruban mémoire a toutes ses cases inoccupées. Un calcul sera complètement terminé si $a = \not\emptyset$. Pour qu'un ruban soit accepté, ou reconnu, il faut de plus que dans cet état terminal $s \in F$.

On montrerait que les machines de TURING déterministiques ou non-déterministiques, à mouvement dans un seul sens ou dans les deux sens sont équivalentes, en ce sens qu'elles acceptent les mêmes ensembles de rubans, et qu'elles reconnaissent la classe des langages récursivement énumérables.

2) Les automates à mémoire linéairement bornée dérivent immédiatement des machines de TURING non-déterministiques à mouvement dans les deux sens. Leur appellation se justifie par l'étude du volume de mémoire que nécessite de tels automates lorsqu'ils sont utilisés au cours d'un calcul. Alors que pour les machines de TURING, il n'est pas possible de donner une borne supérieure a priori de ce volume de mémoire, il est

possible de le faire pour les automates à mémoire linéairement bornée, et elle est de la forme $k\,n$, où k est une constante appropriée et n la longueur du plus long des mots de Σ^*. Les automates à mémoire linéairement bornée reconnaissent la classe des langages engendrés par les grammaires contextuelles.

3) Les automates à pile de mémoires, plus précisément non-déterministiques et à mouvement dans les deux sens, se représentent par le système

$$P = \langle S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_o, Z_o, F \rangle,$$

où S, Σ, Γ, s_o, F sont comme en 1), où $Z_o \subset \Gamma$ est un symbole initial placé sur le ruban mémoire, et où $\delta(s,a,X) \in \{(t,\gamma,d),\ldots$ avec $\gamma \in \Sigma^*$ et d relatif au ruban d'entrée est une application de $S \times (\Sigma \cup \{\emptyset,\#\}) \times \Gamma$ dans $S \times \Gamma^* \times \{-1,0,1\}$. La tête de lecture du ruban mémoire (infini) remplace X par séquence γ de longueur finie, si bien que le déplacement du ruban mémoire peut se faire par empilement d'informations au moyen de γ (par exemple $\gamma = Z_o A_1$ puis $Z_o A_1 A_2$, la tête de lecture lisant le symbole toujours le plus à droite), ou par effacement d'un symbole (si par exemple $\gamma = \Lambda$, alors $Z_o A_1 A_2$ devient $Z_o A_1$ et la tête de lecture se placera devant A_1).

Les automates déterministiques et à mouvement dans un seul sens pour lesquels on réserve couramment la désignation d'automates à pile de mémoires, reconnaissent la classe des langages context-free.

4) Passons, pour terminer, aux automates finis, qui ne possèdent pas de mémoire du tout, qui reconnaissent les langages réguliers, et dont l'étude fera l'objet de ce chapitre et des suivants. Nous allons, pour la simplicité, considérer un automate fini déterministique à mouvement dans un seul sens (à qui on réserve plus couramment l'appellation tout court d'automate fini). On peut le représenter par le système :

$$\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F \rangle,$$

où $S, \sum, s_o, F$ sont comme en 1) et où $\delta(s,a) = t$ est une application de $S \times \sum$ dans S (on incorpore ici les marqueurs à $\sum$).

Par comparaison avec la définition des langages réguliers, on se rendra compte qu'au vocabulaire auxiliaire S correspond l'ensemble des états internes de l'automate, qu'au vocabulaire terminal $\sum$ correspond le vocabulaire d'entrée (marqueurs exclus), qu'à l'axiome s_o correspond l'état initial de l'automate, enfin qu'aux règles de grammaires $A \longrightarrow aB$ ou $A \longrightarrow a$ correspondent les fonctions de transition $\delta(A,a) = B$ ou $\delta(A,a) = \emptyset \in F$. Si l'automate se trouve dans une situation (A,a) pour laquelle il n'existe pas de fonction de transition, il se bloque ; si après avoir calculé il se retrouve dans la situation $(\emptyset,\not\emptyset)$ le ruban est accepté ou reconnu.

A titre d'exemple, l'automate défini par

$$\mathcal{A} = \langle \{A,B,\emptyset\}, \{\not\emptyset,a,b,\not\emptyset\}, \delta, A, \emptyset \rangle,$$

$$\delta(A,\not\emptyset) = A,$$
$$\delta(A,a) = A,$$
$$\delta(A,b) = B,$$
$$\delta(B,\not\emptyset) = \emptyset,$$

accepte le langage $L = \{a^m b^n \; ; \; m \geqslant 1, \; n \geqslant 2\}$. Notons en effet une configuration de l'automate par son état interne, suivie des informations contenues sur le ruban d'entrée limitées par les deux marqueurs, le positionnement de la tête de lecture étant signalisé par un chapeau sur le symbole lu. On aura la succession des configurations :

$$(A, \hat{\not\emptyset}\, a \ldots ab \ldots b\not\emptyset) \longrightarrow (A, \not\emptyset\, \hat{a} \ldots ab \ldots b\not\emptyset) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (A, \not\emptyset\, a \ldots \hat{a}b \ldots \not\emptyset)$$
$$\longrightarrow (A, \not\emptyset\, a \ldots a\hat{b} \ldots b\not\emptyset) \longrightarrow (B, \not\emptyset\, a \ldots ab\, \hat{b} \ldots b\not\emptyset) \longrightarrow \ldots \longrightarrow$$
$$(B, \not\emptyset\, a \ldots ab \ldots \hat{b}\not\emptyset) \longrightarrow (B, \not\emptyset\, a \ldots ab \ldots \hat{\not\emptyset}) \longrightarrow (\emptyset, \not\emptyset\, a \ldots ab \ldots b\not\emptyset).$$

Remarquons que les marqueurs ont un rôle accessoire et que l'on peut ne pas les faire apparaître explicitement.

4.2. Définition des automates finis

Soit $\sum$ un ensemble ; un mot (ou ruban ou bande) sur $\sum$ est une suite finie x

$$x = \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_i \in \sum,$$

d'éléments de $\sum$. La longueur $\ell(x)$ de x est le nombre n d'éléments de la suite x. Le mot (unique) x tel que $\ell(x) = 0$ sera désigné par Λ. Soit $y = \tau_0 \tau_1 \cdots \tau_{m-1}$ un autre mot de $\sum$; alors xy, le résultat de la concaténation de x par y, est défini par

$$xy = \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \tau_0 \tau_1 \cdots \tau_{m-1}.$$

On admet que

$$\Lambda x = x \Lambda = x$$

et que

$$x(yz) = (xy)z.$$

L'ensemble de tous les mots sur $\sum$ sera désigné par $\sum^*$; $\sum^*$ est donc un semi-groupe libre pour l'opération de concaténation, ayant Λ comme élément unité et les $\sigma \in \sum$ comme générateurs. On aura souvent l'occasion de couper un mot en morceaux. Soit, par exemple, $x = \sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$; on adoptera la notation

$$_k x_\ell = \sigma_k \sigma_{k+1} \cdots \sigma_{\ell-1},$$

où $k \leqslant \ell \leqslant n$: en d'autres termes $_k x_\ell$ est une section (ou portion) de x qui va du $(k+1)$-nième au ℓ-ième symbole de x. La longueur de $_k x_\ell$ est évidemment $\ell - k$. On admettra que lorsque $k = \ell$, alors $_k x_\ell = \Lambda$, le mot de longueur 0. On a la propriété utile suivante :

$$x = {}_0 x_k \; {}_k x_n,$$

où $k \leqslant n$, et, d'une manière générale,

$$_k x_m = {}_k x_\ell \; {}_\ell x_m,$$

où $k \leqslant \ell \leqslant m \leqslant n$. La section x_{o}^{k} est une section initiale de x de longueur k. La notation évidente x^n pour $x\,x\ldots x$ (n fois) sera également utilisée avec la convention $x^o = \Lambda$.

On définit quelquefois des sous-ensembles de $\sum^*$ que l'on appelle des évémements. On définit alors pour des sous-ensembles $A \subseteq \sum^*$, $B \subseteq \sum^*$ l'opération

$$AB = \{ xy \ ; \ x \in A, \ y \in B \},$$

appelée produit (complexe) de A et B ; on définit aussi, pour $n \geqslant o$, $A^o = \{\Lambda\}$ et, par récurrence, $A^{n+1} = A^n A$; l'ensemble

$$A^* = A^o \cup A \cup A^2 \cup \ldots\ldots$$

est appelée l'étoile de A.

Dorénavant $\sum$ représentera un ensemble fini fixé que l'on désignera par le nom d'alphabet (ou de vocabulaire). Le nombre des symboles de l'alphabet n'est pas important, mais ce qui le reste c'est que tous les automates considérés utilisent le même alphabet afin de pouvoir comparer les différentes machines entre elles.

Définition 1

Un automate fini (a.f.) sur $\sum$ est un système $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$, où S est un ensemble fini non-vide (l'ensemble des états internes), $\delta : S \times \sum \longrightarrow S$ est la fonction de transition ou (fonction d'état suivant que l'on donne quelquefois sous forme de table), $s_o \in S$ est l'état initial, et $F \subseteq S$ l'ensemble des états désignés comme finals de $\mathcal{A}$

La fonction δ peut être prolongée de manière unique à une fonction $\delta^* : S \times \sum^* \longrightarrow S$ par la définition inductive suivante :

$$\delta^*(s, \Lambda) = s, \ s \in S,$$

$$\delta^*(s, x\sigma) = \delta(\delta^*(s,x), \sigma), \ s \in S, \ \sigma \in \sum, \ x \in \sum^*.$$

Intuitivement la fonction δ décrit les transitions d'états de $\mathcal{A}$: si $\mathcal{A}$ est à l'état s et lit une entrée $\sigma \in \sum$, il ira à l'état $s' = \delta(s, \sigma)$; d'une façon analogue, si $\mathcal{A}$ est à l'état s,

$\delta^*(s,x)$ où $x \in \Sigma^*$, sera l'état de la machine obtenu en partant de l'état s et en lisant le mot x symbole par symbole. Il résulte de la définition du prolongement de δ que l'on a la propriété

$$\delta^*(s,xy) = \delta^*(\delta^*(s,x),y),\ s \in S,\ x,\ y \in \Sigma^*.$$

On peut facilement définir maintenant l'ensemble de ceux des mots qui sont "acceptés" par l'automate.

Définition 2

L'ensemble de mots

$$T(\mathcal{A}) = \{ x\ ;\ x \in \Sigma^*,\ \delta^*(s_o,x) \in F \}$$

est l'ensemble (l'événement) défini (ou accepté ou reconnu) par $\mathcal{A}$. Un ensemble $\mathcal{A} \in \Sigma^*$ s'appelle un ensemble (ou événement) régulier s'il existe un automate fini $\mathcal{A}$ tel que $A = T(\mathcal{A})$.(*)

La signification de la définition précédente peut être rendue plus claire par un diagramme. Soit $x = \sigma_o \cdots \sigma_{n-1}$. Soit, pour chaque $k \leqslant n$, $s_k = \delta(s_o, x_k)$, si bien que l'on a pour $k > 0$: $s_k = \delta(s_{k-1}, \sigma_{k-1})$. La condition que x appartienne à $T(\mathcal{A})$ est que s_n soit dans F. Chaque s_k est l'état de l'automate $\mathcal{A}$ après avoir atteint le k-ième symbole du mot x. Ainsi si l'on écrit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} & \sigma_o & & \sigma_1 & & \sigma_2 & \cdots\cdots & & \sigma_{n-1} \\ s_o & & s_1 & & s_2 & & s_3 \cdots\cdots s_{n-1} & & s_n, \end{array}$$

on obtient une image complète du mouvement de l'automate $\mathcal{A}$ lisant le mot x. Remarquons dans cette figure qu'il y a exactement un état interne de plus que de symboles dans le mot, fait qui sera utilisé au paragraphe 5.1.

(*) Les ensembles réguliers et les automates ont d'abord été définis par S.C. KLEENE [20]

Un a.f. $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F \rangle$ agit comme un sondage dans le sens suivant : soit $U = T(A)$ et $V = \Sigma^* - T(A)$. Pour chaque mot x, x appartient à U ou x appartient à V suivant que $\delta^*(s_o,x) \in F$ ou que $\delta^*(s_o,x) \in S-F$. L'automate sépare de cette façon les mots de U de ceux de V à l'aide de son état final.

Cela suggère un mécanisme plus général de reconnaissance.

Théorème 1

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un mécanisme de reconnaissance $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, G_1, G_r \rangle$ où δ et s_o sont comme dans la définition 1, et $G_1, \ldots, G_r$ sont des sous-ensembles disjoints de S, est qu'il existe une famille d'ensembles réguliers (de mots) réciproquement disjoints $\{U_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant r\}$; $\mathcal{A}$ alors un mécanisme de reconnaissance des mots appartenant à $\bigcup_i U_i$.

La condition est nécessaire

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, G_1, \ldots, G_r \rangle$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $G_i \subset S$, pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Posons $U_i = \{x \; ; \; \delta^*(s_o,x) \in G_i\}$ les ensembles U_i sont deux à deux disjoints puisque les ensembles G_i le sont ; chaque ensemble U_i est l'ensemble régulier de l'automate $\mathcal{A}_i = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, G_i \rangle$ puisque $U_i = \{x \; ; \; \delta^*(s_o,x) \in G_i\}$, donc $U_i = T(\mathcal{A}_i)$. $\mathcal{A}$ est un mécanisme de reconnaissance des mots appartenant à $\bigcup_i U_i$: si $x \in \bigcup_i U_i$, il existe un j tel que $x \in U_j$, donc $\delta^*(s_o,x) \in G_j$.

La condition est suffisante

Soit $\{U_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant r\}$ une famille d'ensembles réguliers réciproquement disjoints ; soit pour chaque i, $\mathcal{A}_i = \langle S_i, \Sigma, \delta_i, s_o^i, F_i \rangle$ un automate tel que $T(\mathcal{A}_i) = U_i$. Soit $S = S_1 \times \ldots \times S_r$ et $s_o = (s_o^1, \ldots, s_o^r)$.

Soit δ l'applicaton de $S \times \sum$ dans S définie par

$\delta((s_1,\ldots,s_r),\sigma) = (\delta_1(s_1,\sigma),\ldots,\delta_r(s_r,\sigma))$ pour tout $(s_1,..,s_r) \in S$ et $\sigma \in \sum$. Soit, pour chaque i, $G_i = H_1^i \times \ldots \times H_r^i$, où $H_j^i = S_j - F_j$ respectivement $H_j^i = F_j$ suivant que $j \neq i$ ou $j = i$. Alors $\{G_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant r\}$ est une famille de sous-ensembles disjoints de S et on a pour un mot x, $x \in U_i$ et seulement si $\delta^*(s_o,x) \in G_i$.

$\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, G_1, \ldots, G_r \rangle$ est donc un mécanisme de reconnaissance tel que $x \in U_i$ et seulement si $\delta^*(s_o,x) \in G_i$.

Le Théorème 1 montre qu'en ce qui concerne la structure des ensembles $\breve{U}_i$, la discussion peut être restreinte aux automates et ne pas être prolongée à des mécanismes plus généraux, dans le sens indiqué ci-dessus. Il résulte également du Théorème 1 que la puissance discriminatrice d'un mécanisme général de reconnaissance $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, G_1, \ldots, G_r \rangle$ est intimement liée aux ensembles réguliers.

Remarquons aussi que la définition des automates, telle qu'elle a été donnée, n'est pas essentiellement différente d'une définition des automates dans lesquels on inclurait des sorties (ou extractions) successives et pour lesquels les suites d'entrées se transformeraient alors en des suites de sorties (voir par exemple paragraphe 5.2). On peut en effet faire correspondre à chaque état $s \in F$ la sortie 1 et à chaque état $s \in S-F$ la sortie 0. On associe alors à $\mathcal{A}$ l'application $\varphi : \sum^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ telle que

$$\varphi(\sigma_o \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) = \zeta_o \zeta_1 \cdots \zeta_{n-1},$$

où $\zeta_i = 1, 0 \leqslant i \leqslant n-1$, si $\delta^*(s_o, \sigma_o \cdots \sigma_i) \in F$ et $\zeta_i = 0$ sinon. Plusieurs généralisations sont possibles. On peut partitionner l'ensemble S en une réunion de k ensembles (disjoints), $S = F_o \cup F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1}$, et obtenir une application $\varphi : \sum^* \longrightarrow \{0,1,\ldots,k-1\}^*$ en des mots d'un alphabet à k lettres. On peut, de plus, prendre la

sortie correspondant à F_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, comme étant un mot w_i d'un certain alphabet Ω. On obtient ainsi une application $\varphi : \Sigma^* \longrightarrow \Omega^*$ qui ne préserve même pas la longueur. Enfin, la sortie peut être constituée par une fonction $f(s, \sigma)$ de l'état courant et de l'entrée courante de $\mathcal{A}$ (automates de MEALY). Toutes ces formulations se ramènent l'une à l'autre et conduisent à la même théorie mathématique. Nous conserverons la formulation de la Définition 1.

4.3. Automates non-déterministiques

Les automates utilisés jusqu'à présent étaient strictement déterministiques dans leur action : ils n'avaient qu'une et une seule façon de changer leurs états dans toute situation particulière. Imposer que toutes les machines soient de cette forme entraîne des inconvénients : le nombre d'états internes nécessaires même pour des opérations élémentaires peut être en effet relativement grand. Nous introduirons alors ici les automates non-déterministiques et montrerons que tout ensemble de mots défini par une telle machine peut aussi bien être défini par un automate ordinaire. S'il y a réduction du nombre d'états internes nécessaires, il y a équivalence quant aux ensembles acceptés.

Définition 3

Un automate (fini) non-déterministique est un 5-uplet :

$$\mathcal{A} = < S, \Sigma, \delta, S_o, F >,$$

où

(i) S est un ensemble fini ;

(ii) δ est une application $S \times \Sigma$ dans 2^S (*)

(iii) S_o et F sont des sous-ensembles de S, avec S_o non-vide.

Un automate non-déterministique diffère d'un automate de deux manières, premièrement, la fonction δ applique chaque état et chaque entrée en un

---

(*) 2^S désigne, comme d'habitude, la famille des sous-ensembles de S ; c'est une algèbre booléenne d'ensembles, c'est-à-dire qu'elle est fermée pour la réunion, l'intersection et la complémentation (par rapport à S).

ensemble S' d'états s' (éventuellement l'ensemble vide $\emptyset$) où $S' \subseteq S$ est un ensemble dépendant de s et de σ : deuxièmement, l'automate non-déterministique possède un ensemble d'états "de départ". La signification de F est la même dans les deux mécanismes.

Un automate non-déterministique n'est donc pas une machine probabiliste mais une machine qui a plusieurs possibilités d'évolution. A chaque phase de lecture d'un mot, il aura la liberté de choisir un parmi plusieurs états internes nouveaux. Evidemment, une suite de choix conduira soit à des situations à partir desquelles il n'y aura plus d'évolution possible, soit à des états finals n'appartenant pas à la classe désignée F. Nous ne prendrons pas en considération de tels échecs et admettrons que la machine accepte un mot s'il existe au moins une combinaison gagnante, soit une suite d'options menant à l'état final désigné. La définition suivante précisera cela.

Définition 4

Soit $\mathcal{A} = < S, \Sigma, \delta, S_o, F >$ un automate non-déterministique. Un mot $x = \sigma_o \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ est accepté par $\mathcal{A}$ s'il existe une suite $s_o, s_1, \ldots, s_n$ d'états tels que

(i) $s_o \in S_o$,
(ii) $s_i \in \delta(s_{i-1}, \sigma_{i-1})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$,
(iii) $s_n \in F$.

Il est sous-entendu que Λ est un mot accepté si $S_o \cap F$ est non vide. Soit $T(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$.

Un automate est un cas particulier d'un automate non-déterministique, en ce sens que dans un automate, S_o ainsi que chaque $\delta(s, \sigma)$ sont des ensembles constitués par un seul état.

L'importance des automates non-déterministiques consiste, comme va le montrer le Théorème 2 de ce paragraphe, en ce que l'ensemble des mots acceptés par un automate non-déterministique est un ensemble régulier. Ainsi, mesurés par $T(\mathcal{A})$, les automates sont exactement aussi puissants

que les automates non-déterministiques.

Définition 5

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, S_o, F \rangle$ un automate non-déterministique. $D(\mathcal{A})$ est l'automate fini $\langle L, \Sigma, \delta_{D(\mathcal{A})}, t_o, G \rangle$ où $L = 2^S$, $\delta_{D(\mathcal{A})}$ est la fonction définie sur $L \times \Sigma$ par $\delta_{D(\mathcal{A})}(y,\sigma) = \bigcup_{q \in y} \delta(q,\sigma)$, $t_o \in S_o$, et G est la famille des sous-ensembles de S contenant au moins un élément de F.

Théorème 2

$T(\mathcal{A}) = T(D(\mathcal{A}))$ pour tout automate non-déterministique $\mathcal{A}$.

Démonstration

(i) $T(\mathcal{A}) \subseteq T(D(\mathcal{A}))$.

Soit $x = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ un mot de $T(\mathcal{A})$. Soit $s_o, \ldots, s_n$ la suite associée d'états de la Définition 4. Nous nous proposons de montrer que $\delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, x) \in G$. Nous montrerons d'abord, en utilisant l'induction, que $s_j \in \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_j)$. Supposons, pour ce faire, $j=1$; par hypothèse $s_1 \in \delta(s_o, \sigma_1)$ et $s_o \in S_o = t_o$. Il en résulte $s_1 \in \delta(t_o, \sigma_1) = \delta_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1)$ puisque $\delta_{\mathcal{A}}(t_o, \sigma_1) = \bigcup_{s \in t_o} \delta(s, \sigma_1)$. Supposons, ensuite, que l'affirmation soit vraie pour $j \leqslant k$.

Par définition $\delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k+1}) = \delta_{D(\mathcal{A})}[\delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k), \sigma_{k+1}]$ et $s_k \in \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$; par définition de $\delta_{D(\mathcal{A})}$, on a :

$$\delta(s_k, \sigma_{k+1}) \subseteq \bigcup_{y \in \delta_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k)} \delta(y, \sigma_{k+1})$$

$$= \delta_{D(\mathcal{A})}(\delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k), \sigma_{k+1}) = \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k+1}).$$

Puisque $s_{k+1} \in \delta(s_k, \sigma_{k+1})$, en vertu de la définition de s_{k+1} il résulte que $s_{k+1} \in \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k+1})$. On a ainsi montré que $s_j \in \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_j)$ pour tout $j \leqslant n$.

On a en particulier $s_n \in \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_n) = \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, x)$.

Comme $s_n \in F$, il résulte que $\delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, x) \in G$ en vertu de la définition de G. Il résulte, en définitive que $x \in T(D(\mathcal{A}))$ et que $T(\mathcal{A}) \subseteq T(D(\mathcal{A}))$.

(ii) $T(D(\mathcal{A})) \subseteq T(\mathcal{A})$.

Soit $x = \sigma_1 \cdots \sigma_n \in T(D(\mathcal{A}))$. On se propose de construire une suite d'états $s_o, s_1, \ldots, s_n$ de $\mathcal{A}$ telle que $x \in T(\mathcal{A})$. Soit pour chaque k, $t_k = \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$; t_n est alors dans G puisque $t_n = \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_n) = \delta_{D(\mathcal{A})}(t_o, x) \in G$, x étant un mot accepté par $D(\mathcal{A})$. Soit s_n un état quelconque de $\mathcal{A}$ appartenant à $t_n \cap F$, $s_n \in t_n \cap F$, $s_n \in S$. La définition de t_n appartenant à G garantit l'existence de s_n (G est la famille de sous-ensembles G_i de S contenant au moins un élément de F, donc $t_n \cap F \neq \emptyset$, $t_n \cap F$ contient au moins un état).

Comme $s_n \in t_n = \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_n) = \delta_{D(\mathcal{A})}(\delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}), \sigma_n)$

$$= \delta_{D(\mathcal{A})}(t_{n-1}, \sigma_n),$$

on déduit de la définition de $\delta_{D(\mathcal{A})}$ que $s_n \in \delta(s_{n-1}, \sigma_n)$ pour un certain élément $s_{n-1} \in t_{n-1}$. On a :

$$t_{n-1} = \delta^*_{D(\mathcal{A})}(t_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) = \delta_{D(\mathcal{A})}(t_{n-2}, \sigma_{n-1}).$$

Il en résulte :

$$s_{n-1} \in t_{n-1} = \delta_{D(\mathcal{A})}(t_{n-2}, \sigma_{n-1}) = \bigcup_{s_{n-2} \in t_{n-2}} \delta(s_{n-2}, \sigma_{n-1}),$$

et

$s_{n-1} \in \delta(s_{n-2}, \sigma_{n-1})$ pour un certain élément $s_{n-2} \in t_{n-2}$.

En continuant de la même façon on obtient une suite $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_o$, telle que

$$s_k \in t_k \ , \ \forall k \ ; \ s_k \in \delta(s_{k-1}, \sigma_k) \quad \text{pour} \quad k > o \ ; \ \text{et} \ \ s_n \in F.$$

Comme $t_o = S_o$, on voit que $s_o \in S_o$. Par conséquent, le mot x est accepté, $x \in T(\mathcal{A})$ et $T(D(\mathcal{A})) \subseteq T(\mathcal{A})$.

Ce théorème a beaucoup de conséquences intéressantes. Il montre, par exemple, que tout automate ayant plusieurs états initiaux peut être remplacé par un automate équivalent ayant un seul état initial. Il semblerait que les notions d'état final et d'état initial soient duales ; en fait comme on peut le voir facilement avec l'alphabet $\sum = \{0,1\}$, l'ensemble des mots de la forme 0^n ou 1^n ne peut pas être défini par un automate non-déterministique quelconque ayant un seul état final désigné. La notion correcte de dualité entre états initiaux et états finals est reliée à l'interversion de la droite et de la gauche comme l'indiquent la définition et le théorème suivants.

Définition 6

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, S_o, F \rangle$ un automate non-déterministique. Le dual de $\mathcal{A}$ est la machine $\tilde{\mathcal{A}} = \langle S, \sum, \tilde{\delta}, F, S_o \rangle$, où la fonction $\tilde{\delta}$ est définie par la condition.

$$s' \in \tilde{\delta}(s, \sigma) \quad \text{si et seulement si} \quad s \in \delta(s', \sigma).$$

Remarquons que l'on a immédiatement l'égalité $\tilde{\tilde{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$. Le rapport existant entre les ensembles définis par un automate et son dual est donné par le

Théorème 3

Si $\mathcal{A}$ est un automate non-déterministique, alors $T(\tilde{\mathcal{A}}) = \widetilde{T(\mathcal{A})}$.

Démonstration

En vertu de l'égalité $\tilde{\tilde{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$, on doit seulement montrer que

$T(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \widetilde{T(\mathcal{A})}$. Soit $x = \sigma_o\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ un mot de $T(\widehat{\mathcal{A}})$; il faut montrer que $\tilde{x} \in T(\mathcal{A})$. Soit $s_o, s_1, \ldots, s_n$ la suite d'états internes de $\mathcal{A}$ telle que $s_o \in F$, $s_n \in S_o$, $s_k \in \widetilde{\delta}(s_{k-1}, \sigma_{k-1})$ pour $k=1,\ldots,n$. Définissons une nouvelle suite $s'_o, s'_1, \ldots, s'_n$ par la relation $s'_k = s_{n-k}$ pour $k \leqslant n$. On a $s'_o \in S_o$ et $s'_n \in F$. Pour $k > o$ et $k \leqslant n$, $s'_{k-1} = s_{n-k+1} \in \widetilde{\delta}(s_{n-k}, \sigma_{n-k})$, soit, autrement dit, $s_{n-k} = s'_k \in \delta(s'_{k-1}, \sigma_{n-k})$. En définissant de même σ'_o, $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}$, par la relation $\sigma'_k = \sigma_{n-k-1}$, on voit que $\sigma'_{k-1} = \sigma_{n-k}$ et $\sigma'_o\sigma'_1 \cdots \sigma'_{n-1} = \tilde{x}$. Ainsi $\tilde{x} \in T(\mathcal{A})$, ce qui était à démontrer.

Signalons, pour en revenir au Théorème 2, qu'il est de plus un outil important qui sera entre autre utilisé dans la démonstration du théorème fondamental de caractérisation de la famille des ensembles réguliers.

4.4. Théorèmes de caractérisation des ensembles réguliers

La complexité que peuvent prendre les ensembles acceptés par les automates n'est pas évidente. Pour comprendre la nature de ces ensembles acceptés, nous développerons dans ce paragraphe des caractérisations mathématiquement simples et entièrement intrinsèques, qui mettront en particulier en lumière l'effet que produit la considération d'un nombre seulement fini d'états internes.

Définition 7

Une relation d'équivalence E sur l'ensemble $\sum^*$ de mots est invariante à droite si xEy implique xzEyz pour tout z dans $\sum^*$. Il existe évidemment une définition analogue des relations d'équivalence invariantes à gauche.

Définition 8

Une relation d'équivalence sur l'ensemble $\sum^*$ est une relation de congruence si elle est invariante à droite et à gauche.
Etant donné un ensemble $T \subseteq \sum^*$, on peut définir deux relations E_T et $\equiv_T$ par :

$$xE_T y \iff \forall v \in \sum^*,\ xv \in T \text{ si et seulement si } yv \in T ;$$

$$x \equiv_T y \iff \forall u,\ v \in \sum^*,\ uxv \in T \text{ si et seulement si } uyv \in T.$$

Si R est une congruence, alors les relations xRz et yRw impliquent toujours $xyRzw$; par conséquent, si $[x]$ est la classe d'équivalence contenant x, et $[y]$ celle contenant y, alors on peut définir sans ambiguité le produit par l'équation $[x]\,[y] = [xy]$.
L'ensemble des classes d'équivalence est le semi-groupe quotient de $\sum^*$ par la congruence R et s'appelle une image homomorphe de $\sum^*$. Parmi les images homomorphes distinctes de $\sum^*$, nous nous intéresserons à celles qui sont finies. Nous utiliserons d'une façon plus générale les relations d'équivalence satisfaisant la

Définition 9

Une relation d'équivalence E sur $\sum^*$ est d'indice fini s'il existe seulement un nombre fini de classes engendrées par cette relation ; on désigne ce nombre par $\mathrm{ind}(E)$.

Donnons maintenant un premier résultat concernant les ensembles réguliers.

Théorème 4 (MYHILL [30])

Soit U un ensemble de mots, $U \subseteq \sum^*$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) U est un ensemble régulier ;

(ii) U est une réunion de classes d'équivalence engendrées par une congruence (sur $\sum^*$) d'indice fini ;

(iii) L'indice de la congruence $\equiv_U$ est fini.

Démonstration

Nous montrerons les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii), (ii) $\Longrightarrow$ (iii), et (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Supposons (i) vrai

Soit $U = T(\mathcal{A})$ pour un automate $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$. Soit $\approx$ la relation définie sur $\sum^*$ de la manière suivante :

$x \approx y$ si et seulement si $\delta^*(p,x) = \delta^*(p,y)$ pour tous les états $p \in S$.

Il est évident que $\approx$ est une relation d'équivalence. Montrons que $\approx$ est invariant à droite. Supposons $x \approx y$; on a alors pour tout mot $z \in \sum^*$:

$$\delta^*(p,xz) = \delta^*(\delta^*(p,x),z) = \delta^*(\delta^*(p,y),z) = \delta^*(p,yz), \forall p \in S,$$

et de même pour l'invariance à gauche :

$$\delta^*(p,zx) = \delta^*(\delta^*(p,z),x) = \delta^*(\delta^*(p,z),y) = \delta^*(p,zy), \forall p \in S ;$$

$\approx$ est donc une congruence.

Soit $r = \#(S)$ le cardinal de S. Il existe alors r^r fonctions distinctes de S dans S. Pour chaque mot x, la fonction f(x), définie par $f_x(q) = \delta(q,x)$, est une de ces r^r fonctions. Il y a donc au plus r^r fonctions différentes, et il existe donc au plus r^r classes d'équivalence. Par conséquent $\approx$ est d'indice fini.

Enfin soit $x \in T(\mathcal{A})$ et $x \approx y$. Alors $\delta^*(s_o,x) = \delta^*(s_o,y)$, donc $y \in T(\mathcal{A})$. Cela montre que la classe d'équivalence $[x] = \{y ; x \approx y\}$ est un sous ensemble de $T(\mathcal{A})$. Alors $U = T(\mathcal{A}) = \bigcup_{x \in T(\mathcal{A})} [x]$. U est par conséquent la réunion des classes d'équivalence engendrées par $\approx$.
(i) implique donc (ii).

Supposons maintenant (ii) vrai.

Soit $\approx$ une congruence satisfaisant (ii). Soit $\equiv_U$ la relation définie par (iii). Evidemment $\equiv_U$ est symétrique, réflexive, transitive, invariante à gauche et invariante à droite.

Par conséquent $\equiv_U$ est une congruence. Il reste à montrer que $\equiv_U$ est d'indice fini : soient x, y deux mots tels que $x \not\approx y$. Supposons que $zxw \in U$: comme $\approx$ est invariant à gauche et à droite, $zxw \not\approx zyw$. Comme U est la réunion des classes d'équivalence engendrées par $\approx$, $zyw \in U$. De la même façon $zyw \in U$ implique $zxw \in U$. Donc si $x \approx y$, alors $x \equiv_U y$. Ainsi, chaque classe d'équivalence engendrée par $\approx$ est un sous-ensemble d'une classe d'équivalence engendrée par $\equiv_U$. Le nombre des classes d'équivalence engendrées par $\equiv_U$ est alors au plus égal à celui des classes d'équivalence engendrées par $\approx$ et comme $\approx$ est d'indice fini, il en est de même pour $\equiv_U$. Par conséquence $\equiv_U$ est d'indice fini. Donc (ii) implique (iii).

Supposons enfin que (iii) est vrai

Nous devons définir un automate $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F \rangle$ pour lequel $U = T(\mathcal{A})$. Soit S l'ensemble des classes d'équivalence engendrées par la congruence $\equiv_U$. Par hypothèse S est fini. Soit D une classe d'équivalence quelconque et x un élément de D. Définissons $\delta(D,\sigma) = [x\sigma]$ pour chaque $\sigma \in \Sigma$. Soit y un autre mot de D ; alors $x \equiv_U y$. Comme $\equiv_U$ est invariant à droite, $x\sigma \equiv_U y\sigma$. Donc $[x\sigma] = [y\sigma]$. Ainsi $\delta(D,\sigma)$ est défini de façon unique, c'est-à-dire indépendamment de l'élément de l'élément x choisi dans D. Soit $s_o = [\Lambda]$ et $F = \{[x] \; ; \; x \in U\}$. En vertu de la définition de $\equiv_U$, si $x \in U$ et $y \equiv_U x$, alors $y \in U$. Ainsi $U = \bigcup_{x \in U} [x]$. Alors $\delta(s_o, x) = [x]$ est dans F si et seulement si x est dans U. Par conséquent $U = T(\mathcal{A})$ et (iii) implique (i).

Donnons un exemple à l'aide du Théorème 4, d'ensemble U non régulier

Exemple 1

Soit $\Sigma = \{a,b\}$. Considérons l'ensemble $U = \{(a)^n(b)^n \; ; \; n \geqslant 1\}$. Supposons que U soit régulier. Soit $\approx$ une congruence safisfaisant ii)

du théorème 4. Comme $\approx$ est d'indice fini, tous les éléments $(a)^i$, $i \geqslant 1$, ne peuvent pas être non-équivalents. Donc, pour certains m et n, $m \neq n$, on a $(a)^m \approx (a)^n$. Comme $\approx$ est invariant à droite, $(a)^m(b)^n \approx (a)^n(b)^m$. Puisque U est la réunion de classes d'équivalence et que U contient $(a)^m(b)^m$, U contient $(a)^n(b)^m$. Cela est une contradiction. Donc U n'est pas régulier.

L'inconvénient principal du Théorème 4 est que le nombre des classes d'équivalence pour la relation $\equiv_U$ peut devenir très grand comme l'indique la démonstration de l'implication (i)$\Longrightarrow$(ii). Pour être économique et rester proche d'automates plus simples pouvant servir à définir U, on devrait se limiter aux relations d'équivalence invariantes à droite (à la place des congruences).

Théorème 5 (NERODE [34])

Les trois conditions suivantes concernant un ensemble U de mots de $\sum^*$ sont équivalentes :

(i) U est un ensemble régulier ;

(ii) U est la réunion de classes d'équivalence d'une relation d'équivalence E invariante à droite (sur $\sum^*$) d'indice fini ;

(iii) l'indice de la relation E_U est fini.

La démonstration du Théorème 5 est présque identique à celle du Théorème 4.

Remarques

1) On peut démontrer le Théorème 5 en remplaçant "invariant à droite", "xw" et "yw", de la définition de E_U par "invariant à gauche", "wx", et "wy" respectivement.

2) La relation $\approx$ de la démonstration de l'implication (i)$\Longrightarrow$(ii) du Théorème 4 aurait pu être définie comme suit :

$$x \approx y \text{ si et seulement si } \delta^*(s_o,x) = \delta^*(s_o,y).$$

Cela implique que le nombre de classes d'équivalence déterminées par $\approx$ est au plus égal au nombre des états internes de $\mathcal{A}$. Cette remarque et une analyse de la démonstration complète du Théorème 5 (ou 4) donnent immédiatement le

Corollaire 1

Si U est un ensemble régulier pour $\mathcal{A}$, alors le nombre des classes d'équivalence pour la relation E_U est le plus petit nombre d'états internes des automates définissant U.

En d'autres termes, la relation E_U mène directement à l'automate le plus économique définissant U.

Le Théorème 5 permet de mettre en évidence la régularité ou la non régularité de certains ensembles $U \subseteq \sum^*$. Ainsi SHEPHERDSON [43] a utilisé une version de ce théorème pour montrer que les automates à mouvement dans les deux sens (voir paragraphe 6.3.) sont équivalents aux automates ordinaires ; RABIN [38] a fait de même pour montrer que, moyennant une condition naturelle, les automates probabilistes sont équivalents aux automates ordinaires.

Etant donné une congruence $\equiv$ sur $\sum^*$, on peut constituer l'ensemble $\sum^*/\equiv$ de classes d'équivalence de $\sum^*$ par rapport à $\equiv$ en semi-groupe, de façon que l'application $\varphi : x \longrightarrow [x]$ de chaque $x \in \sum^*$ dans sa classe d'équivalence soit un homomorphisme de $\sum^*$ sur $\sum^*/\equiv$. Réciproquement, à chaque homomorphisme $\varphi : \sum^* \longrightarrow M$ de $\sum^*$ sur un semi-groupe M correspond une congruence $\equiv$ définie par $x \equiv y$ si et seulement si $\varphi(x) = \varphi(y)$.

En tenant compte de ces remarques, on peut reformuler le Théorème 4 de la façon suivante :

Théorème 4'

Un ensemble $U \subseteq \sum^*$ est régulier si et seulement si il existe un semi-groupe fini M, un ensemble $H \subseteq M$ et un homomorphisme $\varphi : \sum^* \longrightarrow M$ tels que $U = \varphi^{-1}(H)$.

Le semi-groupe $\sum^*/\equiv_U$ occupe, dans cette version, la position d'un semi-groupe canonique associé à l'événement régulier U.

Signalons enfin, pour terminer ce paragraphe, une autre caractérisation des ensembles réguliers. Posons pour cela la

Définition 10

Si on associe à chaque $\sigma \in \sum$ une fonction F_σ, on appelle algèbre de type $\sum$ un système $\langle A, a_o, f_\sigma \rangle_{\sigma \in \sum}$ où $a_o \in A$ et chaque $f_\sigma, \sigma \in \sum$, est une application de A dans A.

On a, en particulier, les algèbres libres $F_{\sum}$ de type $\sum$ définies comme suit : soit v_o un symbole fixé ; soit V le plus petit ensemble tel que $v_o \in V$ et tel que si $t \in V, \forall t$, alors $F_\sigma(t) \in V$ où $\sigma \in \sum$. Alors $F_{\sum} = \langle V, v_o, f_\sigma \rangle_{\sigma \in \sum}$ où $f_\sigma : V \longrightarrow V$ est défini par $f_\sigma(t) = F_\sigma(t)$, $t \in V$. Il existe une application biunivoque naturelle $\hat{\phi}$ de l'ensemble des mots $x \in \sum^*$ dans celui des termes $t \in V$ donnée par

$$\hat{\phi}(v_o) = \Lambda, \hat{\phi}(F(t)) = \hat{\phi}(t)_\sigma, \sigma \in \sum, t \in V.$$

La caractérisation est la suivante. Un ensemble $U \subseteq \sum^*$ est régulier si et seulement s'il existe une algèbre finie $F = \langle A, a_o, \bar{f}_\sigma \rangle_{\sigma \in \sum}$ de type $\sum$, un homomorphisme $\Psi : F_{\sum} \longrightarrow F$ et un sous-ensemble $H \subseteq A$ tels que $U = \hat{\phi}(\Psi^{-1}(H))$.
Nous signalons dans cet ordre d'idées les généralisations de S. EILENBERG et J. WRIGHT [8].

Disons enfin que l'on pourra donner d'autres caractérisations des ensembles réguliers lorsqu'on aura défini un certain nombre de propriétés concernant la famille des ensembles réguliers (cf. paragraphe 4.5.).

4.5. Théorèmes de caractérisations de la famille des ensembles réguliers

Définition 11

La famille $\mathcal{S}$ de tous les ensembles réguliers est la classe de tous les ensembles de la forme $T(\mathcal{A})$ pour un automate $\mathcal{A}$.

Définition 12

Soit P une famille de sous-ensembles finis de l'ensemble $\sum^*$,

fermée par rapport à la réunion, le produit, et l'étoile. Soit Q la classe de toutes les familles P. La famille des ensembles $\bigcap_{P \subseteq Q} P$ est alors contenue dans Q et s'appelle <u>la plus petite famille</u> de sous-ensembles finis de $\sum^*$; elle est fermée pour la réunion, le produit et l'étoile.

Donnons maintenant une caractérisation de la famille des ensembles réguliers à l'aide de la réunion, du produit, et de l'étoile.

<u>Théorème 6</u> (KLEENE-MYHILL)

La famille $\mathcal{R}$ des ensembles réguliers est la plus petite famille de sous-ensembles finis de $\sum^*$, qui soit fermée pour les opérations de réunion, produit et étoile.

<u>Démonstration</u>

Soit Γ_1 la famille des ensembles réguliers, et soit Γ_2 la plus petite famille de sous-ensembles finis de $\sum^*$, qui soit fermée pour les opérations de réunion, produit et étoile. Montrons que (a) $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$, et (b) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ (*)

(a) $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$.

(i) $\emptyset$ et chaque ensemble $\{x\}$ consistant en un mot sont dans Γ_1 ;

(ii) Si U et V sont dans Γ_1, alors $U \cup V$ et UV sont dans Γ_1 ;

(iii) Si U est dans Γ_1, alors U^* est dans Γ_1 ;

Γ_1 sera alors une famille de sous-ensembles finis de $\sum^*$, fermée pour les opérations de réunion, produit, et étoile ; comme Γ_2 est une sous-famille de chaque telle famille, l'inclusion souhaitée en résultera.

(*) La démonstration du (b) donnée ici est celle de R.F. MC NAUGHTON et H. VAMADA [25].

Montrons (i). Il est évident que $\emptyset$ et $\{\Lambda\}$ sont dans Γ_1.

Soit $x = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ un mot quelconque. Soit

$S = \{q_i ; 1 \leq i \leq k+2\}$ un ensemble de $k+2$ symboles abstraits.

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{k+1}\} \rangle$, où la fonction δ est définie par

$\delta(q_i, \sigma_i) = q_{i+1}$, $\delta(q_i, \sigma) = q_{k+2}$ si $\sigma \in \Sigma - \{\sigma_i\}$, $1 \leq i \leq k$, et

$\delta = q_{k+2}$ sinon. Alors $T(\mathcal{A}) = \{x\}$. On a, en effet, $\{x\} \in T(\mathcal{A})$ puisque

$x = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ et $\delta^*(s_o, x) = \delta^*(q_1, \sigma_1 \cdots \sigma_k) = \delta^*[\delta(q_1, \sigma_1), \sigma_2 \cdots \sigma_k] =$

$\delta^*(q_2, \sigma_2 \cdots \sigma_k) = \cdots = \delta(q_k, \sigma_k) = q_{k+1}$, donc $\delta^*(s_o, x) \in F = \{q_{k+1}\}$.

si $\sigma \in \Sigma - \{q_i\}$, $\delta(q_1, \sigma) = q_{k+2}$, donc tout autre mot x n'est pas accepté.

Montrons (ii). Soit $U = T(A)$, $V = T(\mathcal{B})$, où $\mathcal{A} = \langle S_{\mathcal{A}}, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}}, s_o^{\mathcal{A}}, F_{\mathcal{A}} \rangle$ et $\mathcal{B} = \langle S_{\mathcal{B}}, \Sigma, \delta_{\mathcal{B}}, s_o^{\mathcal{B}}, F_{\mathcal{B}} \rangle$. Soit $\mathcal{C}$ l'automate $\langle S_{\mathcal{A}} \times S_{\mathcal{B}}, \Sigma, \delta_{\mathcal{C}}, (s_o^{\mathcal{A}}, s_o^{\mathcal{B}}), (F_{\mathcal{A}} \times S_{\mathcal{B}}) \cup (S_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}}) \rangle$, où $\delta_{\mathcal{C}}((p,q),\sigma) = (\delta_{\mathcal{A}}(p,\sigma), \delta_{\mathcal{B}}(q,\sigma))$ pour chaque $p \in S_{\mathcal{A}}$, $q \in S_{\mathcal{B}}$, $\sigma \in \Sigma$. Un mot x est dans $T(\mathcal{C})$ si et seulement si $\delta_{\mathcal{C}}^*((s_o^{\mathcal{A}}, s_o^{\mathcal{B}}), x) = (\delta_{\mathcal{A}}^*(s_o^{\mathcal{A}}, x), \delta_{\mathcal{B}}^*(s_o^{\mathcal{B}}, x))$ est dans $(F_{\mathcal{A}} \times S_{\mathcal{B}}) \cup (S_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}})$; cela est équivalent à $\delta_{\mathcal{A}}^*(s_o^{\mathcal{A}}, x) \in F_{\mathcal{A}}$ ou $\delta_{\mathcal{B}}^*(s_o^{\mathcal{B}}, x) \in F_{\mathcal{B}}$, donc x est dans $T(\mathcal{C})$ si et seulement si $x \in U$ $T(\mathcal{A})$ ou $x \in V = T(\mathcal{B})$, donc si et seulement si $x \in U \cup V$. On a ainsi démontré $T(\mathcal{C}) = U \cup V$.

Pour montrer que UV est régulier, nous supposerons, sans perdre en généralité, que $S_{\mathcal{A}} \cap S_{\mathcal{B}} = \emptyset$. Soit $\mathcal{D}$ l'automate non-déterministique $\mathcal{D} = \langle S_{\mathcal{A}} \cup S_{\mathcal{B}}, \Sigma, \{s_o^{\mathcal{A}}\}, F_{\mathcal{B}} \rangle$, où la fonction $\delta_{\mathcal{D}}$ est définie comme suit :

$$\delta_{\mathcal{D}}(q,\sigma) = \begin{cases} \{\delta_{\mathcal{A}}(q,\sigma)\} & \text{si } q \in S_{\mathcal{A}} - F_{\mathcal{A}} \\ \{\delta_{\mathcal{A}}(q,\sigma)\ \delta_{\mathcal{B}}(s_o^{\mathcal{B}},\sigma)\} & \text{si } q \in F_{\mathcal{A}} \\ \{\delta_{\mathcal{B}}(q,\sigma)\} & \text{si } q \in S_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

Un mot x est dans UV si et seulement si $x = x_1 x_2$ pour un $x_1 \in U$ et un $x_2 \in V$. Cela est équivalent à $\delta_{\mathcal{A}}^*(s_o^{\mathcal{A}}, x_1) \in F_{\mathcal{A}}$ et $\delta_{\mathcal{B}}(s_o^{\mathcal{B}}, x_2) \in F_{\mathcal{B}}$ soit à $x_1 x_2 \in T(\mathcal{D})$.

Montrons (iii). Soit $U = T(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta_{\mathcal{A}}, s_o, F \rangle$ et $\mathcal{B}$ l'automate non-déterministique $\mathcal{B} = \langle S, \sum, \delta_{\mathcal{B}}, \{s_o\}, F \rangle$ où $\delta_{\mathcal{B}}$ est la fonction définie par

$$\delta_{\mathcal{B}}(q,\sigma) = \begin{cases} \{\delta_{\mathcal{A}}(q,\sigma)\} & \text{si } q \in S - F, \\ \{\delta_{\mathcal{B}}(q,\sigma),\ \delta_{\mathcal{A}}(s_o,\sigma)\} & \text{si } q \in F. \end{cases}$$

on vérifie que $U^* = T(\mathcal{B})$.

(b) $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.

Soit U un ensemble régulier. Nous montrerons que U est obtenu à partir de certains sous-ensembles finis de $\sum^*$, en utilisant les opérations de réunion, produit, et étoile un nombre fini de fois ; il en résultera que Γ_1 est une sous-famille de chaque famille de sous-ensembles finis de $\sum^*$, fermée pour les opérations de réunion, produit et étoile ; ainsi $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.

Comme U est régulier, $U = T(\mathcal{A})$ pour un certain automate $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, q_1, F \rangle$. Désignons les états de $\mathcal{A}$ par $q_1, \ldots, q_n$. Supposons que α_{ij}^u a été défini pour $0 \leqslant u \leqslant k-1$ et $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Supposons encore que :

(i) α_{ij}^u est la suite de mots $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ pour laquelle $\delta^*(q_i, \sigma_1 \cdots \sigma_r) = q_j$, et telle que si $\delta^*(q_i, \sigma_1 \cdots \sigma_t) = q_x$ pour chaque $1 \leqslant t < r$, alors $x \leqslant u$.

En particulier :

(ii) α_{ij}^o est l'ensemble de mots σ, de longueur au plus égale à 1 pour lesquels $\delta^*(q_i,\sigma) = q_j$.

(i) est ainsi vrai pour $k=1$. Définissons α_{ij}^k pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ comme étant l'ensemble

(iii) $\alpha_{ij}^k = \alpha_{ij}^{k-1} \cup \alpha_{ik}^{k-1} (\alpha_{kk}^{k-1})^* \alpha_{kj}^{k-1}$.

On voit, en utilisant (i), que chaque mot appartenant à l'ensemble du second membre de (iii) applique q_i dans q_j, avec tous les états intermédiaires q_x tels que $x \leqslant k$. Soit $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ un mot appliquant q_i dans q_j, avec tous les états intermédiaires q_x tels que $x \leqslant k$. Si tous les états intermédiaires q_x sont tels que $x \leqslant k-1$, alors $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ est dans α_{ij}^{k-1}. S'il y a des états intermédiaires q_x tels que $x=k$, alors $\sigma_1 \cdots \sigma_r \in \alpha_{ik}^{k-1}(\alpha_{kk}^{k-1})^* \alpha_{kj}^{k-1}$. Ainsi α_{ij}^{k} satisfait (i). On a ainsi défini α_{ij}^{k} pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant i, j \leqslant n$, et il satisfait (i).

Soit $q_{m(1)}, \ldots, q_{m(v)}$ les différents états de F. En vertu de (i), chaque $\alpha_{1m(i)}^{n}$ est l'ensemble des mots appliquant q_1 dans $q_{m(i)}$, sans état intermédiaire q_x tel que $x > n$. Puisqu'il n'existe pas d'état q_j tel que $j > n$, il en résulte que $\alpha_{1m(i)}^{n}$ est l'ensemble des mots appliquant q_1 dans $q_{m(i)}$. On a donc $U = T(\mathcal{A}) = \bigcup_i \alpha_{1m(i)}^{n}$. Chaque α_{ij}° est un ensemble fini, et chaque α_{ij}^{k} est obtenu à partir d'ensembles de la forme α_{yz}^{k-1} par réunion, produit, et étoile. U est donc obtenu à partir d'ensembles finis par réunion, produit et étoile. U est donc inclus dans Γ_2, d'où $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.

Ce théorème montre que chaque ensemble régulier estobtenu à partir d'un nombre fini de mots en utilisant les opérations de réunion, produit et étoile un nombre fini de fois. La démonstration du (b) donne un algorithme pour déterminer les ensembles réguliers définis par un automate. L'algorithme consiste à construire différents ensembles α_{ij}^{k} [il y en a $n^2(n+1)$] et à prendre ensuite une réunion appropriée. Cette méthode est directe, mais longue.

Corollaire 2

La famille des ensembles réguliers est une algèbre de BOOLE

Démonstration

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F \rangle$ et $U = T(\mathcal{A})$. Alors $\Sigma^* - T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, S-F \rangle$. La famille des ensembles réguliers est donc fermée pour la complémentation. Comme l'ensemble vide $\emptyset$ est régulier et la réunion de deux ensembles réguliers est régulière, le corollaire résulte.

Corollaire 3

L'intersection de deux ensembles réguliers est un ensemble régulier.

Démonstration

En vertu du Corollaire 2, l'intersection de deux ensembles réguliers est régulière. On peut aussi montrer ce résultat directement de la manière suivante. Soit $U = T(\mathcal{A})$ et $V = t(\mathcal{B})$, où :

$$\mathcal{A} = \langle S_{\mathcal{A}}, \Sigma, \delta_{\mathcal{A}}, s_o^{\mathcal{A}}, F_{\mathcal{A}} \rangle \text{ et } \mathcal{B} = \langle S_{\mathcal{B}}, \Sigma, \delta_{\mathcal{B}}, s_o^{\mathcal{B}}, F_{\mathcal{B}} \rangle$$

Soit $\mathcal{C} = \langle S_{\mathcal{A}} \times S_{\mathcal{B}}, \Sigma, \delta_{\mathcal{C}}, (s_o^{\mathcal{A}}, s_o^{\mathcal{B}}), F_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}} \rangle$, où

$$\delta[(p,q),\sigma] = [\delta_{\mathcal{A}}(p,\sigma), \delta_{\mathcal{B}}(q,\sigma)] \text{ pour tout}$$

$p \in S_{\mathcal{A}}$, $q \in S_{\mathcal{B}}$, $\sigma \in \Sigma$, le <u>produit direct des automates</u> $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. On a alors $U \cap V = T(\mathcal{C})$. En effet, $x \in U \cap V$ si et seulement si $x \in T(\mathcal{A}) = U$ et $x \in T(\mathcal{B}) = V$, donc si et seulement si $\delta_{\mathcal{A}}^*(s_o^{\mathcal{A}}, x) \in F_{\mathcal{A}}$ et $\delta_{\mathcal{B}}^*(s_o^{\mathcal{B}}, x) \in F_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire si et seulement si $(\delta_{\mathcal{A}}^*(s_o^{\mathcal{A}}, x), \delta_{\mathcal{B}}^*(s_o^{\mathcal{B}}, x)) \in F_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire si et seulement si $\delta_{\mathcal{C}}^*[s_o^{\mathcal{A}}, s_o^{\mathcal{B}}), x] \in F_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}}$, soit si $x \in T(\mathcal{C})$.

Donnons une autre propriété. Soit x un mot ; il peut être écrit à l'envers et soit x' le résultat de telle sorte que si $x = \sigma_o \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$, alors $x' = \sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_o$.

On a évidemment les règles :

$$\sigma' = \sigma \text{ , pour } \sigma \in \Sigma^*,$$
$$\Lambda' = \Lambda \text{ ,}$$
$$x'' = x \text{ ,}$$
$$(xy)' = y'x'.$$

Si U est un ensemble de mots, on posera $U' = \{x' ; x \in U\}$. Le mouvement de la tête de lecture d'un automate fini (à mouvement dans un seul sens) se fait par définition de gauche à droite. Aussi, le résultat suivant est-il quelque peu surprenant :

Théorème 7

Si $U \in \mathcal{F}$, alors $U' \in \mathcal{F}$

Démonstration

Soit $\equiv_U$ la relation définie par rapport à U au Théorème 4 (iii) et soit $\equiv'_{U'}$ la relation analogue pour U^*. Supposons que $x \equiv'_{U'} y$. Si $z\,x'w \in U$, alors $(zx'w)' \in U'$. Mais $(zx'w)' = w'xz'$, donc $w'xz' \in U'$ comme $w'yz' = (zy'w)'$, il s'ensuit que $zy'w \in U$.
Cela montre que $x' \equiv_U y'$. Comme $U'' = U$, cet argument est aussi valable si on change U et U' entre eux, et on a démontré que $x \equiv'_{U'} y$ si et seulement si $x' \equiv_U y'$, $\forall x,y \in \Sigma^*$.
Il est alors évident que si $\equiv_U$ est d'indice fini, il doit en être de même pour $\equiv'_{U'}$ avec le même nombre de classes d'équivalence.

Remarque 3

La propriété (i) du Théorème 6 (a) ne fait pas intervenir la théorie des automates non-déterministiques ; on peut aussi la démontrer en utilisant le Théorème 5. De même, le Corollaire 2 peut être démontré directement à l'aide du Théorème 5. Enfin, en utilisant ces deux résultats on peut démontrer directement que Γ_1 contient tous les ensembles finis de mots.

Remarque 4

Le problème de la caractérisation de la famille des ensembles réguliers peut être reformulé autrement. Soit $Y_1, Y_2, \ldots$ des variables

prenant leurs valeurs dans des sous-ensembles de $\sum^*$. L'ensemble R des termes réguliers (en $Y_1, Y_2, \ldots$) est le plus petit ensemble satisfaisant les conditions

(1) $Y_n \in R$, $1 \leqslant n < \infty$,

(2) Si $R_1 \in R$ et $R_2 \in R$, alors $(R_1 \cup R_2) \in R$, $(R_1 R_2) \in R$, $R_1^* \in R$.

(voir Définition 12). Chaque élément $R \in R$ s'appelle un terme régulier. Par exemple, $((Y_3(Y_2 \cup Y_5))^* \cup Y_1)$ en est un.

Si on prend alors un terme régulier $R(Y_1, \ldots, Y_n)$ et si on remplace chaque Y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, par un ensemble réduit à un seul élément $\{\sigma_i\}$ où si $\sigma_i \in \sum$, on obtient ce que KLEENE appelle une expression régulière $R(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ (nous omettrons de mettre l'accolade réservée à l'écriture des ensembles lorsqu'ils sont constitués par un seul élément). Ainsi les correspondances $Y_1 \longrightarrow 0$, $Y_2 \longrightarrow 1$, $Y_3 \longrightarrow 0$, $Y_5 \longrightarrow 1$, appliquées au terme défini précédemment donnent $((0(1 \cup 1))^* \cup 0^*) = (01)^* \cup 0^*$.

Les termes réguliers sont évidemment des polynômes généralisés dans l'algèbre qui comporte les opérations XY, $X \cup Y$, et X^*. Les expressions régulières, d'autre part, sont simplement des moyens de description de sous-ensembles particuliers (réguliers) de $\sum^*$.

KLEENE [20] a introduit la notion d'expression régulière et a démontré le

Théorème 8

Un ensemble $T \subseteq \sum^*$ est régulier si et seulement s'il existe une expression régulière $R(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ où $\sigma_i \in \sum$, $1 \leqslant i \leqslant k$, telle que $T = R(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$.

Le théorème 6 en donne une démonstration à l'aide des automates non-déterministiques. Sa signification est lasuivante : les a.f. peuvent reconnaître des ensembles qui sont des expressions régulières.

Le fait que chaque ensemble régulier peut être représenté par une expression régulière donne naissance à un certain nombre de problèmes.

Deux termes réguliers $R(Y_1,\ldots,Y_n)$ et $Q(Y_1,\ldots,Y_n)$ (cette notation signifie que R et Q ne contiennent pas d'autres variables que $Y_1,\ldots,Y_n$) s'appellent <u>équivalents</u>, $R \equiv Q$, si pour tous les ensembles $A_1 \subseteq \Sigma^*,\ldots,A_n \subseteq \Sigma^*$

$$R(A_1,\ldots,A_n) = Q(A_1,\ldots,A_n).$$

Ainsi, par exemple, $(Y_1(Y_2 \cup Y_3))^* = ((Y_1Y_2) \cup (Y_1Y_3))^*$.

On montre dans ces conditions que si Σ possède au moins deux lettres, alors deux termes $P(Y_1,\ldots,Y_n)$ et $Q(Y_1,\ldots,Y_n)$ sont équivalents si et seulement si, lorsqu'on interprète $Y_1,\ldots,Y_n$ comme des lettres appartenant à un alphabet $\Omega = \{Y_1,\ldots Y_n\}$, les expressions régulières $P(Y_1,\ldots,Y_n)$ et $Q(Y_1,\ldots,Y_n)$ représentent le même ensemble régulier sur Ω.

Les démonstrations prouvant que les expressions régulières donnent des ensembles définissables (ou acceptables) par des automates finissont effectives dans le sens où un automate peut être effectivement construit à partir d'expressions régulières. De plus, le problème de savoir si deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définissent le même ensemble est décidable. Comme conséquence de ces propositions, on déduit que le problème de l'équivalence des termes réguliers peut être effectivement résolu.

CHAPITRE 5

PROBLEMES DE DECISION POUR LES AUTOMATES FINIS

5.1. Consistance des ensembles acceptés par les automates finis

Le problème que nous nous posons ici est de savoir si, étant donné un a.f. $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F \rangle$, l'ensemble $T(\mathcal{A})$ est ou non vide. Si on n'a aucune idée a priori, on pourrait être amené à essayer toute l'infinité de mots possible ; on veut donc connaître une borne supérieure du nombre de mots qu'il est nécessaire de tester pour avoir une réponse. Une telle borne supérieure est fournie par le

Théorème 1

Soit $\mathcal{A}$ un a.f. à r états. Alors $T(\mathcal{A})$ est non vide si et seulement si $\mathcal{A}$ accepte un mot de longueur inférieure à r.

Démonstration

Il suffit de montrer la nécessité de la condition. Supposons que $T(\mathcal{A})$ est non vide et que x est un mot de $T(\mathcal{A})$ de longueur minimale. Soit n la longueur de x. Supposons, par l'absurde, que $r \leqslant n$. Il résulte qu'il doit exister des entiers $k < \ell \leqslant n$ tels que

$$\delta^*(s_o, {}_o x_k) = \delta^*(s_o, {}_o x_\ell),$$

où ${}_o x_k$ et ${}_o x_\ell$ sont les segments initiaux de x de longueurs k et l. Soit le mot $x' = {}_o x_k \, {}_\ell x_n$ qui est plus court que x. On a

$$\delta^*(s_o, x') = \delta^*(s_o, {}_o x_k \, {}_\ell x_n) = \delta^*(\delta^*(s_o, {}_o x_k), {}_\ell x_n) = \delta^*(\delta^*(s_o, {}_o x_\ell), {}_\ell x_n)$$

$$= \delta^*(s_o, {}_o x_\ell \, {}_\ell x_n) = \delta^*(s_o, x)$$

puisque $x = {}_o x_\ell \, {}_\ell x_n$. Donc x' doit appartenir à $T(\mathcal{A})$, ce qui contredit la condition de minimalité sur x et montre que $n < r$.

Corollaire 1

Etant donné un a.f. $\mathcal{A}$, il existe une procédure finie permettant de décider en un nombre fini d'étapes si $T(\mathcal{A})$ est vide.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du Théorème 1.

Il est également possible de donner une condition nécessaire et suffisante simple de nature similaire pour que $T(\mathcal{A})$ soit infini. Etablissons au préalable le

Lemme 1

Soit $\mathcal{A}$ un automate à r états. Soit x un mot $T(\mathcal{A})$ de longueur n. Si $r \leqslant n$, alors il existe des mots y,z,w tels que $x = yzw$, $z \neq \Lambda$. De plus, tous les mots $yz^m w$ appartiennent à $T(\mathcal{A})$ pour $m = 0,1,2,\ldots$

Démonstration

Comme dans le théorème 1, il doit exister des entiers $k < \ell \leqslant n$ tels que

$$\delta^*(s_o, {}_o x_k) = \delta^*(s_o, {}_o x_\ell).$$

Soit $y = {}_o x_k$, $z = {}_k x_\ell$, $w = {}_\ell x_n$. Comme $k < \ell$, on voit que $z \neq \Lambda$. Evidemment $x = yzw$, et $yz = {}_o x_\ell$, d'où $\delta^*(s_o,y) = \delta^*(s_o,yz)$. Il résulte par récurrence que $\delta^*(s_o,y) = \delta(s_o,yz^m)$. On en déduit

$$\delta^*(s_o,x) = \delta^*(s_o,yzw) = \delta^*(\delta(s_o,yz),w) = \delta^*(\delta(s_o,yz^m), w)$$

$$= \delta^*(s_o,yz^m w).$$

Tous les mots $yz^m w$ appartiennent donc bien à $T(\mathcal{A})$.

Théorème 2

Soit $\mathcal{A}$ un automate à r états. Alors $T(\mathcal{A})$ est infini si et seulement s'il contient un mot de longueur n avec $r \leqslant n \leqslant 2r$.

Démonstration

La suffisance est une conséquence directe du Lemme 1. Supposons que $T(\mathcal{A})$ soit infini. L'alphabet $\sum$ est fini, donc $T(\mathcal{A})$ doit contenir

des mots de longueur supérieure à tout entier. Soit x un mot de $T(\mathcal{A})$ de longueur $n \geqslant r$. Comme dans les deux démonstrations précédentes, il doit exister des entiers $k < \ell \leqslant n$ tels que

$$\delta^*(s_0, {}_0x_k) = \delta^*(s_0, {}_0x_\ell).$$

Soit alors un mot nouveau $x \in T(\mathcal{A})$ de longueur minimale n, et pour lequel il existe des entiers satisfaisant l'équation ci-dessus. Supposons par ailleurs que ℓ est le plus petit entier de cette sorte ($\ell \leqslant n$). Nous ignorons pour l'instant si $n \geqslant r$ ou non. Soit $i < j < \ell$; on a

$$\delta^*(s_0, {}_0x_i) \neq \delta^*(s_0, {}_0x_j).$$

Comme il existe au plus r valeurs que δ peut prendre, cela montre que $\ell \leqslant r$. Si $\ell \leqslant i < j \leqslant n$, on a de même

$$\delta^*(s_0, {}_0x_i) \neq \delta^*(s_0, {}_0x_j),$$

puisqu'autrement le mot $x' = {}_0x_i {}_j x_n$ serait un mot plus court que x satisfaisant les conditions données sur x. En comptant le nombre des indices entre ℓ et n, on voit que $n - \ell + 1 \leqslant r$. En ajoutant ℓ aux deux membres et en appliquant l'inégalité précédente, on trouve $n+1 \leqslant 2r$, ou encore $n < 2r$. Si $r \leqslant n$, la démonstration serait terminée. Si $n < r$, soit $y = {}_0x_k$, $z = {}_k x_\ell$, $w = {}_\ell x_n$. On a $x \neq \Lambda$, et tous les mots $yz^m w$ sont dans $T(\mathcal{A})$. Soit m le plus petit entier tel que

$$r \leqslant k + m(\ell - k) + (m - \ell).$$

On a $m \neq 0$, puisque $k + (n - \ell) < n < r$. Si

$$2r \leqslant k + m(\ell - k) + (n - \ell),$$

alors

$$r \leqslant k + (m - \ell)(\ell - k) + (n - \ell),$$

puisque $\ell - k \leqslant n < r$. Mais cela est impossible étant donnée l'hypothèse de minimalité faite sur m. Par conséquent

$$k + m(\ell - k) + (n - \ell) < 2r$$

et le nombre représentant le membre gauche de cette inégalité est la

longueur de $yz^m w$. Cela montre qu'il existe un mot de $T(\mathcal{A})$ ayant la longueur voulue.

Corollaire 2

Etant donné un a.f. $\mathcal{A}$, il existe une procédure effective permettant de décider en un nombre fini de pas si $T(\mathcal{A})$ est infini.

Corollaire 3

Soit $\mathcal{A}$ un a.f. à r états, et soit l'alphabet $\sum$ contenant $q > 1$ symboles. Alors si $T(\mathcal{A})$ est fini, il peut avoir au plus

$$\sum_{k < r} q^k = \frac{q^r - 1}{q-1} \quad \text{mots.}$$

5.2. Equivalence des automates finis

Nous chercherons à étudier dans ce paragraphe quelles conditions doivent vérifier deux automates pour qu'ils définissent le même ensemble de mots.

Définition 1

Deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents si $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$. Il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux automates soient équivalents. La démonstration de certains de ces résultats passe par l'utilisation de la théorie des machines séquentielles complètes ; aussi nous commencerons par en donner les éléments indispensables.

a. Machines séquentielles complètes

Les machines que nous considérons ici comportent des entrées, des configurations internes ou des états, et des sorties, et notamment les sorties dépendront de l'histoire séquentielle des entrées. Cela signifie que la sortie présente dépend non seulement de l'entrée présente mais aussi des entrées précédentes et de l'ordre dans lequel elles sont apparues. Ces machines ont un nombre fini d'entrées, un nombre fini de configurations internes, et un nombre fini de sorties.

Elles sont de nature déterministique, de telle sorte que si l'histoire des entrées se répète, il en est de même de celle des sorties.

Définition 2

Une machine séquentielle complète(*) est un 5-uplet :

$$\mathcal{S} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda \rangle,$$

où : S est un ensemble non vide fini"d'états" ; $\sum$ est un ensemble non vide fini"d'entrées" ; Δ est un ensemble non vide fini de "sorties" ; δ est une fonction (la"fonction de transition" ou fonction "d'état suivant") qui applique $S \times \sum$ dans S, c'est-à-dire :

$\delta(q, \sigma) = \bar{q}$, où $q, \bar{q} \in S, \sigma \in \sum$; λ est une fonction (appelée fonction de "sortie") qui applique $S \times \sum$ dans Δ, c'est-à-dire :

$\lambda(q, \sigma) = E$, où $q \in S$, $\sigma \in \sum$, $E \in \Delta$.

Pour étudier le comportement des machines séquentielles, nous prolongerons les deux fonctions δ et λ de façon que pour chaque suite (éventuellement vide) d'entrées $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, et pour chaque état s, $\delta^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$ soit l'état final de la machine, et $\lambda^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$ représente la suite des sorties intermédiaires et finales. $\sum^*$ est l'ensemble des mots formés avec les éléments de $\sum$.

Définition 3

On pose pour chaque mot $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ et chaque état s

$$\delta^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k) = \delta(s_k, \sigma_k),$$

où

$$s_1 = s \quad \text{et} \quad s_{i+1} = \delta(s_i, \sigma_i) \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1,$$

ainsi que

$$\lambda^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k) = \lambda(s, \sigma_1)\ \lambda^*(\delta(s, \sigma_1), \sigma_2 \cdots \sigma_k).$$

(*) Ces machines ont été définies par MOORE dans [29], où la sortie est indépendante de l'entrée et est fonction uniquement de l'état interne ; cette restriction n'existe plus dans MEALY [26].

Les fonctions de transition et de sortie, $\delta^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$ et $\lambda^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$, sont ainsi définies pour tout état $s \in S$ et pour tout mot x de longueur k, $k \geqslant 0$. On pose également :

$$\delta(x, \Lambda) = x \quad \text{et} \quad \lambda(x, \Lambda) = \Lambda .$$

On a évidemment

$$\lambda^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k) = \lambda(s, \sigma_1)\lambda(s_2, \sigma_2) \cdots \lambda(s_k, \sigma_k).$$

On voit aisément que, pour chaque état s, chaque mot $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ et chaque entier r, $1 \leqslant r \leqslant k$, on a :

(i) $\delta^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k) = \delta^*(\delta^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_r), \sigma_{r+1} \cdots \sigma_k)$,

et

(ii) $\lambda^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_k) = \lambda^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_r)\lambda^*(\delta^*(s, \sigma_1 \cdots \sigma_r), \sigma_{r+1} \cdots \sigma_k)$

Définition 4

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux machines séquentielles complètes telles que $\Sigma_S = \Sigma_T$. Un état p de $\mathcal{S}$ est dit équivalent à un état q de $\mathcal{T}$ et on écrit :

$$p \equiv q, \quad \text{si} \quad \lambda^*_{\mathcal{S}}(p, x) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(q, x) \quad \text{pour tout mot } x.$$

Il résulte de la Définition 4 que :

(i) $p \equiv p$, $\forall\, p$;

(ii) si $p \equiv q$, alors $q \equiv p$;

et (iii) si $p \equiv q$ et $q \equiv r$, alors $p \equiv r$.

$\equiv$ est donc une relation d'équivalence sur l'ensemble des états d'une machine.

Lemme 2

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux machines séquentielles complètes, et soient p dans $\mathcal{S}$ et q dans $\mathcal{T}$ des états équivalents.

Alors $\delta^*_{\mathcal{S}}(p,x)$ et $\delta^*_{\mathcal{T}}(q,x)$ sont des états équivalents pour tout mot x.

Démonstration

Soit x_1 un mot quelconque. Comme $p = q$, on a :

$$\lambda^*_{\mathcal{S}}(p,x) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(q,x) \quad \text{et} \quad \lambda^*_{\mathcal{S}}(p,xx_1) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(q,x\,x_1).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\lambda^*_{\mathcal{S}}(p,x\ \lambda^*_{\mathcal{S}}(\delta^*_{\mathcal{S}}(p,x), x_1) &= \lambda^*_{\mathcal{S}}(p,x\,x_1)\\ &= \lambda^*_{\mathcal{T}}(q,\ x\,x_1) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(q,x)\ \lambda^*_{\mathcal{T}}(\delta^*_{\mathcal{T}}(q,x), x_1)\\ &= \lambda^*_{\mathcal{S}}(p,x)\ \lambda^*_{\mathcal{T}}(\delta^*_{\mathcal{T}}(q,x), x_1),\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda^*_{\mathcal{S}}(\delta^*_{\mathcal{S}}(p,x), x_1) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(\delta^*_{\mathcal{T}}(q,x), x_1).$$

Comme x_1 est arbitraire, il résulte que $\delta^*_{\mathcal{S}}(p,x) \equiv \delta^*_{\mathcal{T}}(q,x)$.

Nous définirons maintenant des conditions d'équivalence de deux machines en considérant toujours leurs caractéristiques terminales.

Définition 5

Les machines séquentielles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont dites équivalentes, et on écrit $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$, si pour chaque état p de $\mathcal{S}$ il existe un état q de $\mathcal{T}$ tel que $p \equiv q$, et, inversement, si pour chaque état q de $\mathcal{T}$ il existe un état p de $\mathcal{S}$ tel que $q \equiv p$.

La relation d'équivalence des machines a évidemment les trois propriétés :

(i) $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}$ pour toute machine $\mathcal{S}$;
(ii) si $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$, alors $\mathcal{T} \equiv \mathcal{S}$;
et (iii) si $\mathcal{S} \equiv \mathcal{T}$ et $\mathcal{T} \equiv \mathcal{R}$, alors $\mathcal{S} \equiv \mathcal{R}$.

La définition 4 inclut la locution "... pour tout mot". Comme il existe un nombre infini de mots pour chaque machine, la définition n'est pas de nature finie. Le but de la théorie qui suit est de décrire une

procédure finie déterminant exactement les couples d'états équivalents.

Définition 6

Soit $\mathcal{S}$ une machine séquentielle. Pour chaque entier $k > 0$, on appelle k-équivalence, $\overset{k}{\equiv}$, la relation définie par $p \overset{k}{\equiv} q$ pour les états p et q si et seulement si $\lambda^*(p,x) = \lambda^*(q,x)$ pour tout mot de longueur $\leqslant k$. Evidemment $\overset{k}{\equiv}$ est une relation d'équivalence. On désigne par P_k l'ensemble des classes d'équivalence engendrées par $\overset{k}{\equiv}$. On a évidemment l'

Application 1

On a $p \equiv q$ si et seulement si $\lambda^*(p,x) = \lambda^*(q,x)$ pour tout x mot de longueur k.

En vertu de l'Application 1, il suffit donc, lorsqu'on traite de $\overset{k}{\equiv}$, de considérer seulement les mots de longueur k. Cela sera fréquemment fait par la suite.

Les résultats essentiels concernant la relation $\overset{k}{\equiv}$ et la partition P_k sont résumés dans le lemme suivant.

Lemme 3

(a) $p \overset{k+1}{\equiv} q$ si et seulement si $p \overset{k}{\equiv} q$ et $\delta(p,\sigma) \overset{k}{\equiv} \delta(q,\sigma)$ pour tout entrée σ.

(b) Si $P_{k+1} = P_k$, alors $P_k = P_j$ pour tout entier $j \geqslant k$.

(c) Si $P_{k+1} = P_k$, alors $p \equiv q$ si et seulement si $p \overset{k}{\equiv} q$.

(d) Si $\neq(P_1) = 1$, alors $P_2 = P_1$.

(e) Si $r = \neq(S_{\mathcal{S}}) \geqslant 2$, alors $P_{n-1} = P_n$.

Démonstration

(a) Supposons $p \overset{k}{\equiv} q$ et $\delta(p,\sigma) \overset{k}{\equiv} \delta(q,\sigma)$ pour toute entrée σ. Soit $\sigma_1 \cdots \sigma_{k+1}$ un mot quelconque de longueur $k+1$. Par hypothèse :

$$\delta(p,\sigma_1) \overset{k}{\equiv} \delta(q,\sigma_1) \quad .$$

puisque cette relation est vraie pour tout entrée σ donc en particulier pour σ_1 ; on a donc $\lambda^*(\delta(p,\sigma_1),x) = \lambda^*(\delta(q,\sigma_1),x)$ pour tout x de longueur k. Alors :

$$\lambda^*(\delta(p,\sigma_1),\sigma_2\cdots\sigma_{k+1}) = \lambda^*(\delta(q,\sigma_1),\sigma_2\cdots\sigma_{k+1}).$$

Comme $p \overset{k}{\equiv} q$; il résulte que $\lambda(p,\sigma_1) = \lambda(q,\sigma_1)$, et que :

$$\begin{aligned}\lambda^*(p,\sigma_1\cdots\sigma_k) &= \lambda(p,\sigma_1)\ \lambda^*(\delta(p,\sigma_1),\sigma_2\cdots\sigma_{k+1}) \\ &= \lambda(q,\sigma_1)\ \lambda^*(\delta(q,\sigma_1),\sigma_2\cdots\sigma_{k+1}) \\ &= \lambda^*(q,\sigma_1\cdots\sigma_{k+1}),\end{aligned}$$

d'où $p \overset{k+1}{\equiv} q$.

Supposons maintenant $p \overset{k+1}{\equiv} q$. On a évidemment $p \overset{k}{\equiv} q$, et il reste à montrer $\delta(p,\sigma) \overset{k}{\equiv} \delta(q,\sigma)$. Soit une entrée σ et les états $\delta(p,\sigma)$, $\delta(q,\sigma)$. Soit x un mot de longueur k ; comme $p \overset{k+1}{\equiv} q$, on a $\lambda^*(p,\sigma x) = \lambda^*(q,\sigma x)$, c'est-à-dire :

$$\lambda(p,\sigma)\ \lambda^*(\ (p,\sigma),x) = \lambda(q,\sigma)\ \lambda^*(\delta(q,\sigma),x).$$

Comme $p \overset{k+1}{\equiv} q$, il résulte que $\lambda(p,\sigma) = \lambda(q,\sigma)$, d'où

$$\lambda^*(\delta(p,\sigma),x) = \lambda^*(\delta(q,\sigma),x),$$

donc

$$\delta(p,\sigma) \overset{k}{\equiv} \delta(q,\sigma).$$

(b) Supposons que $P_{k+1} = P_k$, où P_k est l'ensemble des classes d'équivalence engendrées par $\overset{k}{\equiv}$. Supposons, par récurrence, que $P_{k+i} = P_k$ pour $i \leqslant m$, où $m \geqslant 1$. Pour montrer que $P_{k+m+1} = P_{k+m+1} = P_k$, il suffit de démontrer que si $x \overset{k+m}{\equiv} y$, alors $x \overset{k+m+1}{\equiv} y$. Soit, pour ce faire, deux états p et q tels que $p \overset{k+m}{\equiv} q$. En vertu de(a), $p \overset{k+m-1}{\equiv} q$. et $(p,\sigma) \overset{k+m-1}{\equiv} \delta(q,\sigma)$ pour toute entrée σ. Comme $P_{k+m-1} = P_{k+m}$, il s'ensuit que $p \overset{k+m}{\equiv} q$ et $\delta(p,\sigma) \overset{k+m}{\equiv} (q,\sigma)$. En vertu de (a), $p \overset{k+m+1}{\equiv} q$.

(c) Soit $P_{k+1} = P_k$. Si $p \neq q$, alors évidemment $p \overset{k}{\not\equiv} q$. Supposons que $p \overset{k}{\not\equiv} q$; en vertu de (b), $p \overset{m}{\not\equiv} q$ pour tout entier $m \geqslant k$. Ainsi $\lambda^*(p,x) = \lambda^*(q,x)$ pour tout mot x, d'où $p \equiv q$.

(d) Soit $\# (P_1) = 1$. Alors chaque état $\overset{1}{\equiv}$ à chaque autre état. On a donc, pour tous les états p et q et toutes les entrées σ, $p \overset{1}{\equiv} q$ et $\delta(p,\sigma) \overset{1}{\equiv} \delta(q,\sigma)$. Donc $p \overset{2}{\equiv} q$ en vertu de (a), d'où $P_2 = P_1$.

(e) Soit $\# (P_1) = 1$. En vertu de (d), $P_1 = P_2$, d'où $P_{n-1} = P_n$.

Supposons que $\# (P_1) \geqslant 2$. En vertu de (a), $\# (P_i) \leqslant \# (P_{i+1})$ pour tout i. Comme chaque classe d'équivalence contient au moins un état et $\#(S) = n$, $\# (P_i) \leqslant n$ pour tout i. Ainsi, ou bien $\#(P_{n-1}) = n$, auquel cas $P_{n-1} = P_n$, ou alors il existe un entier $k \leqslant n-1$ tel que $\#(P_k) = \#(P_{k+1})$. Si la dernière éventualité a lieu, alors $P_k = P_{k+1}$, puisque P_{k+1} est plus fin que P_k (en vertu de (a)). Dans les deux cas $P_{n-1} = P_n$.

Théorème 3

Soit $\mathcal{S}$ une machine séquentielle à n états. Les états p et q de $\mathcal{S}$ sont équivalents si et seulement si $\lambda^*(p,x) = \lambda^*(q,x)$ pour tout x de longueur $(n-1)$, c'est-à-dire si et seulement si $p \overset{n-1}{\equiv} q$. De plus, le nombre $(n-1)$ est la plus petite longueur de mot x dans le cas général telle que p et q soient équivalents.

Démonstration

On peut évidemment supposer $n \geqslant 2$. En vertu du (e) du Lemme 3, on a $P_{n-1} = P_n$. En vertu du (c) du Lemme 3, p et q sont équivalents si et seulement si $p \overset{n-1}{\equiv} q$.

Pour voir que le nombre $(n-1)$ ne peut être réduit, considérons la machine $\mathcal{S}$ (appelée un compteur mod n) de la Figure 1. Pour chaque entier positif k il existe seulement un mot x_k de longueur k.

Les états q_1 et q_2 ne sont pas équivalents, puisque $\lambda^*(q_1, x_{n-1}) = (0)^{n-1}$ et $\lambda^*(q_2, x_{n-1}) = (0)^{n-2}1$. On a néanmoins si $k < n-1$:

$$\lambda^*(q_1,x_k) = \lambda^*(q_2,x_k) = (0)^k.$$

entrées	x^1	
états	δ	λ
q_1	q_2	0
q_2	q_3	0
⋮	⋮	
q_{n-1}	q_n	0
q_n	q_1	1

Figure 1

Le théorème 3 donne la meilleure borne, relative à la longueur des mots, nécessaire pour déterminer si des états particuliers de la même machine sont équivalents. La meilleure borne dans le cas des machines à états différents se déduit du

Théorème 4

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ des machines séquentielles à n_1 et n_2 états respectivement, et soit $\Sigma_{\mathcal{S}} = \Sigma_{\mathcal{T}}$; les états p de $\mathcal{S}$ et q de $\mathcal{T}$ sont équivalents si et seulement si $\lambda^*_{\mathcal{S}}(p,x) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(q,x)$ pour tout mot x de longueur (n_1+n_2-1). De plus, le nombre (n_1+n_2-1) est la plus petite longueur de mot dans le cas général.

Démonstration

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que les symboles des états de $\mathcal{S}$ sont distincts des symboles des étatsde $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{U}$ la machine qui est "somme directe" de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$, c'est-à-dire la machine dont la matrice (δ,λ) consiste en la matrice (δ,λ) de $\mathcal{T}$ placée directement en dessous de celle $\mathcal{S}$. La matrice résultante possède

$(n_1 + n_2)$ lignes distinctes en vertu de l'hypothèse concernant les symboles des états de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ $\mathcal{U}$ a donc $(n_1 + n_2)$ états. Soit p un état de $\mathcal{S}$ et q un état de $\mathcal{T}$. Evidemment p considéré dans $\mathcal{S}$ est équivalent à p considéré dans $\mathcal{U}$, et q dans $\mathcal{T}$ est est équivalent à q dans $\mathcal{U}$. En vertu du Théorème 3, les états p et q considérés dans $\mathcal{U}$ sont équivalents si $p \overset{n_1+n_2-1}{\equiv} q$. Ainsi p dans $\mathcal{S}$ et q dans $\mathcal{T}$ sont équivalents si $\lambda^*_{\mathcal{S}}(p,x) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(q,x)$ pour tout mot x de longueur (n_1+n_2-1).

Pour montrer que le nombre (n_1+n_2-1) ne peut être réduit, nous devons considérer deux cas.

(a) Supposons que $n_1 = n_2 = n$. Si $n = 1$. Alors $n_1+n_2-1 = 1$ ne peut évidemment pas être réduit. Supposons $n \geqslant 2$. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ les machines des Figures 2 et 3 respectivement. Considérons les états p_1 et q_1. Soit $x_o = (x^1)^{n-1}(x^2)^n$. Alors $\lambda^*_{\mathcal{S}}(p_1,x_o) \neq \lambda^*_{\mathcal{T}}(q_1,x_o)$.

	x^1	x^2
p_1	p_2 1	p_2 1
p_2	p_3 0	p_1 0
⋮		
p_{n-1}	p_n 0	p_{n-2} 0
p_n	p_n 0	p_{n-1} 0

Figure 2

	x^1	x^2
q_1	q_2 1	q_2 1
q_2	q_3 0	q_1 0
⋮		
q_{n-1}	q_n 0	q_{n-2} 0
q_n	q_{n-1} 0	q_n 0

Figure 3 (a) $(n \geqslant 3)$

	x^1	x^2
q_1	q_2 1	q_2 1
q_2	q_2 0	q_2 0

Figure 3 (b) $(n = 2)$

Néanmoins, comme on le voit facilement, $\lambda^*_{\mathcal{S}}(p_1,x) = \lambda^*_{\mathcal{T}}(q_1,x)$ pour tout mot x de longueur $< n+n-1$.

(b) Supposons $n_1 > n_2$. Considérons les machines $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ des Figures 4 et 5 respectivement.

Soit $x_o = (x^1)^{n_1-1}(x_2)^{n_2}$. Alors $\lambda^*_{\mathcal{S}}(p_1,x_o) \neq \lambda^*_{\mathcal{S}'}(q_1,x_o)$.

	x^1	x^2
p_1	p_2 1	p_2 1
p_2	p_3 0	p_1 0
p_3	p_4 0	p_2 0
⋮		
p_{n_2}	p_{n_2+1} 0	p_{n_2-1} 0
p_{n_2+1}	p_{n_2+2} 0	p_{n_2-1} 0
⋮		
p_{n_1-1}	p_{n_1} 0	p_{n_2-1} 0
p_{n_1}	p_{n_1}	p_{n_1} 0

Figure 4

	x^1	x^2
q_1	q_2 1	q_2 1
q_2	q_3 0	q_1 0
q_3	q_4 0	q_2 0
⋮		
q_{n_2-1}	q_{n_2} 0	q_{n_2-2} 0
q_{n_2}	q_{n_2} C'	q_{n_2-1} 0

Figure 5

La démonstration du Théorème 4 indique une procédure permettant de trouver tous les couples (p,q) d'états p de $\mathcal{S}$ et q de $\mathcal{S}'$ pour lesquels $p \equiv q$. Elle consiste à former la somme directe de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, appliquant (c) du Lemme 3, et à enlever ensuite les couples d'états qui se trouvent seulement dans une des machines.

On peut construire, pour une machine $\mathcal{S}$ arbitraire, une machine qui lui soit équivalente et qui ait le nombre minimum d'états possible. Cela représente un intérêt évident et est important pour la conception des circuits séquentiels de commutation. Nous ne donnerons pas cependant le

théorème correspondant, puisque nous nous attachons ici aux seuls résultats concernant les machines séquentielles, indispendables à la théorie de l'équivalence des automates.

b. Equivalence des automates

Il existe une procédure finie permettant de déterminer si deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont ou non équivalents. L'existence de cette procédure résultera directement de théorèmes que nous donnerons ci-après. Seule la dernière partie de ce paragraphe fera appel à la théorie des machinesséquentielles.

Soient $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \overline{S}, \Sigma, \overline{\delta}, s_o, F \rangle$ deux automates. Par $A \times B$ nous entendons : $\{(a,b) ; a \in A, b \in B\}$. On peut définir par induction une suite $H_i, i = 0, 1, 2, \ldots$ de sous-ensembles de $S \times \overline{S}$ comme suit :

$$H_o = \{(s_o, \overline{s_o})\},$$

$$H_{i+1} = \{(\delta(s,\sigma), \overline{\delta}(t,\sigma)) ; (s,t) \in H_i, \sigma \in \Sigma\}. \qquad (1)$$

On peut vérifier facilement, par récurrence sur i, que $(s,t) \in H_i$ si et seulement s'il existe un mot $x \in \Sigma^*$ tel que $\ell(x) = i$, $\delta^*(s_o,x) = s$, et $\overline{\delta}^*(\overline{s_o},x) = t$.

Soit maintenant $\#(S) = n$, $\#(\overline{S}) = m$, $\#(\Sigma) = k$. La suite H_i, $0 \leqslant i < \infty$, est telle que si

$$H_{j+1} \subseteq H_o \cup \ldots\ldots \cup H_j = U_j$$

pour un certain j, alors on a également

$$H_{j+p} \subseteq H_o \cup \ldots \cup H_j, \; 1 \leqslant p < \infty.$$

Il s'ensuit que la suite des réunions U_i a la forme

$$U_o \subset \ldots \subset U_j = U_{j+1} = U_{j+2} = \ldots\ldots$$

où $\subset$ désigne l'inclusion stricte. Comme $U_i \subseteq S \times \overline{S}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

et comme le dernier ensemble a exactement $n\,m$ éléments, il résulte que $j \leqslant n\,m$. Comme $T(\mathcal{A}) \neq T(\mathcal{B})$ si et seulement s'il existe un mot $x \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(s_o,x) = s \in F$ et $\bar{\delta}^*(\bar{s}_o,x) = t \notin \bar{F}$ ou vice versa, on a :

$$(s,t) \in [F \times (\bar{S} - \bar{F})] \cup [(S - F) \times \bar{F}]. \qquad (2)$$

Le processus de décision se déroule alors de la façon suivante. On vérifie si $(s_o,\bar{s}_o)$ vérifie (2) ; si oui alors $T(\mathcal{A}) \neq T(\mathcal{B})$. Sinon, on définit $H_o = \{(s_o,\bar{s}_o)\} = U_o$. A l'étape $(i+1)$ du processus, H_i et U_i sont donnés. On calcule H_{i+1} d'après la formule (1). On vérifie si H_{i+1} contient un couple (s,t) vérifiant (2). Si oui, alors $T(\mathcal{A}) \neq T(\mathcal{B})$. Sinon, on vérifie si $H_{i+1} \subseteq U_i$, et si cela a lieu, alors $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$, et on a terminé. Si aucun des cas précédents n'a lieu, on forme $U_{i+1} = U_i \cup H_{i+1}$ et on passe à l'étape $(i+2)$.

On sait que le processus prendra fin à une étape $k \leqslant m\,n$. Il est facile d'estimer le nombre de pas de calcul impliqués à chaque étape. Ainsi, par exemple pour H_{i+1}, si on admet que le calcul de $(\delta(s,\sigma), \bar{\delta}(t,\sigma))$ compte pour un "pas", on aura au plus $n\,m\,k$ pas (puisque $\#(H_i) \leqslant n\,m\,\#(\Sigma) = k$). Il est donc facile d'obtenir une borne du nombre total de pas nécessaires à la résolution de notre problème.

On peut, entre autre, désuire de la discussion précédente, le résultat suivant dont nous donnerons cependant une démonstration directe :

Théorème 5

Deux automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas équivalents si et seulement s'il existe un mot x de longueur inférieure au produit du nombre d'états de $\mathcal{A}$ par le nombre d'états de $\mathcal{B}$, et qui soit accepté par un automate sans l'être par l'autre.

Démonstration

Soit $\mathcal{A}'$ l'automate ayant le même nombre d'états que $\mathcal{A}$ et définissant le complément de $T(\mathcal{A})$. Comme dans la démonstration du

Corollaire 2 du paragraphe 4.5. On procède d'une façon analogue pour $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas équivalents si et seulement si un des ensembles $T(\mathcal{A} \times \mathcal{B}')$, $T(\mathcal{A}' \times \mathcal{B})$ n'est pas vide. Le théorème résulte alors directement du Théorème 1 du paragraphe 5.1., du Corollaire 3 du paragraphe 4.5., et de la définition du produit direct de deux automates donnée également dans la démonstration de ce Corollaire.

Corollaire 4

Etant donné deux a.f. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, il existe une procédure finie permettant de décider en un nombre fini de pas si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents.

Pour vérifier si $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$, il suffit donc de considérer les mots x (qui sont en nombre fini) tels que $\ell(x) \leqslant n\,m$. Cette dernière procédure est peu pratique dans la mesure où le nombre de pas peut être k^{nm}. La construction de l'ensemble H_1 (se reporter à la discussion précédant le Théorème 5) permet de grouper pour chaque couple $(s,t) \in S \times \bar{S}$, les mots x tels que $\ell(x) = i$ et $(\varsigma(s_o,x), \varsigma(\bar{s}_o,x)) = (s,t)$ dans une classe d'équivalence. Cela réduit le nombre de pas à considérer à l'étape i de k^i à au plus nm.

Une autre procédure finie permettant de vérifier si $T(\mathcal{A})$ et $T(\mathcal{B})$ sont ou non équivalents est donnée par le théorème suivant.

Théorème 6

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux automates à m et n états respectivement, et soit $\sum_{\mathcal{A}} = \sum_{\mathcal{B}}$: si $T(\mathcal{A})$ et $T(\mathcal{B})$ coincident pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à $(m+n-2)$, alors $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$. De plus, $(m+n-2)$ est la plus petite longueur de mot, dans le cas général.

Démonstration

Soit $\mathcal{A} = \langle S_{\mathcal{A}}, \sum_{\mathcal{A}}, \varsigma_{\mathcal{A}}, p_1, F_{\mathcal{A}} \rangle$ et $\mathcal{B} = \langle S_{\mathcal{B}}, \sum_{\mathcal{B}}, \varsigma_{\mathcal{B}}, q_1, F_{\mathcal{B}} \rangle$.

Pour chaque $\sigma \in \Sigma$ et $q \in S_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X} = \mathcal{A}, \mathcal{B}$ soit :

$$\lambda_{\mathcal{X}}(q,\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in F_{\mathcal{X}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons les machines séquentielles complètes

$\mathcal{S} = (S_{\mathcal{A}}, \Sigma, \{0,1\}, \delta_{\mathcal{A}}, \lambda_{\mathcal{A}})$ et $\mathcal{T} = (S_{\mathcal{B}}, \Sigma, \{0,1\}, \delta_{\mathcal{B}}, \lambda_{\mathcal{B}})$. Supposons que $T(\mathcal{A})$ et $T(\mathcal{B})$ coïncident pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à $(m+n-2)$. On a alors $p_1 \overset{m+n-1}{\equiv} q_1$. En vertu du Théorème 4 du paragraphe 5.2.a, $p_1 \equiv q_1$. Il s'ensuit que $T(\mathcal{A})$ et $T(\mathcal{B})$ coïncident pour tous les mots de longueur au moins $(m+n-1)$. Par conséquent $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$.

Soient maintenant m et n deux entiers positifs. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ les machines séquentielles complètes utilisées dans la démonstration du Théorème 4 du paragraphe 5.2.a pour m et n états, respectivement (Figures 2, 3, 4, 5). Soit $\mathcal{A} = \langle S_{\mathcal{S}}, \Sigma_{\mathcal{S}}, \delta_{\mathcal{S}}, p_1, \{p_1\} \rangle$ et $\mathcal{B} = \langle S_{\mathcal{T}}, \Sigma_{\mathcal{T}}, \delta_{\mathcal{T}}, q_1, \{q_1\} \rangle$. On a alors $T(\mathcal{A}) \neq T(\mathcal{B})$, quoique $T(A)$ et $T(\mathcal{B})$ coïncident pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à $(m+n-3)$.

CHAPITRE 6

GENERALISATIONS

6.1. n-automates

Le mécanisme de reconnaissance étudié jusqu'ici était représenté par un automate qui acceptait ou non un mot à l'aide d'un ensemble d'états "finals". Nous considérerons dans ce paragraphe différents mécanismes à un nombre fini d'états acceptant les mots à l'aide d'autres critères. Parmi ceux-ci on distingue :

(i) dernière entrée et avant dernier état,
(ii) dernier état et dernière sortie (cf. paragraphe 5.2.a),
(iii) dernières sorties.

Nous verrons que la puissance discriminatoire des mécanismes qui en résulte est exactement la même que celle des automates.

Un automate sera appelé un 1-automate. Pour simplifier les définitions à introduire, il sera commode de ne considérer dans ce paragraphe ci que les mots de longueur $\geqslant 1$; la généralité n'en souffrira pas, puisque les concepts que nous introduirons pourraient aussi bien être légèrement modifiés pour admettre Λ.

Notation

(1) Nous désignerons par $\mathbf{Z}_1$ la famille des ensembles réguliers.

(2) Si δ est une application de $S \times \Sigma$ sur S, alors $\delta(q, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) = q$ si $k = 1$.

Définition 1

Un 2-automate est un 5-uplet $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_0, F \rangle$, où δ est une application de $S \times \Sigma$ dans S, s_0 est un élément de S,

et F est un ensemble de couples ordonnés (q,σ) d'éléments $q \in S$ et $\sigma \in \sum$.

Notation

Pour tout 2-automate $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$, désignons par $T(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ ayant la propriété $(\delta^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}), \sigma_k) \in F$:

$$T(\mathcal{A}) = \left\{ (\sigma_1 \cdots \sigma_k) \; ; \; (\delta^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}), \sigma_k) \in F \right\}.$$

Désignons par Z_2, la famille des $T(\mathcal{A})$ pour tous les 2-automates $\mathcal{A}$. Un 2-automate est un mécanisme de reconnaissance qui différencie les mots à l'aide des dernières entrées et des avant-derniers états.

Lemme 1

$$Z_2 = Z_1.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$ un 1-automate. Considérons le 2-automate $\mathcal{B} = \langle S, \sum, \delta, s_o, H \rangle$, où $H = \left\{ (q,\sigma) \; ; \; \sigma \in \sum \; , \delta(q,\sigma) \in F \right\}$. On a évidemment $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$, d'où $Z_1 \subseteq Z_2$.

Montrons maintenant l'inclusion $Z_2 \subseteq Z_1$. Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$ un 2-automate et $U = T(\mathcal{A})$. Considérons la relation R définie comme suit : si $I = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ et $J = \tau_1 \cdots \tau_r$, on a $I \; R \; J$ si et seulement si $\sigma_k = \tau_r$ et $\delta^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) = \delta^*(s_o, \tau_1 \cdots \tau_{r-1})$. R est évidemment une relation d'équivalence, et le nombre des classes d'équivalence engendrées par R est au plus égal à $\#(S)\,\#(\sum)$.

Soit E_U la relation d'équivalence invariante à droite définie par (iii) du Théorème 5 du paragraphe 4.4. Supposons que $I \; R \; J$ pour les

mots I et J. Alors pour une entrée $\sigma_1 \in \Sigma$, $I = M_1 \sigma_1$, $J = M_2 \sigma_1$, et $\delta^*(s_o, M_1) = \delta^*(s_o, M_2)$ en vertu de la définition de R. Soit W un mot arbitraire ; on aura $W = M_3 \sigma_3$ pour une entrée $\sigma_3 \in \Sigma$. On aura donc $IW = I M_3 \sigma_3$ et $JW = J M_3 \sigma_3$, ainsi que :

$$\delta^*(s_o, I M_3) = \delta^*(s_o, M_1 \sigma_1 M_3) = \delta^*[\delta^*(s_o, M_1), \sigma_1 M_3]$$

$$= \delta^*[\delta^*(s_o, M_2), \sigma_1 M_3] = \delta^*(s_o, M_2 \sigma_1 M_3)$$

$$= \delta^*(s_o, J M_3).$$

Donc $IW \in U$ si et seulement si $JW \in U$, puisque $IW \in U$ si et seulement si $(\delta^*(s_o, M_1 \sigma_1 M_3), \sigma_3) \in F$, et $JW \in U$ si et seulement si $(\delta^*(s_o, M_2 \sigma_1 M_3), \sigma_3 \in F$. En d'autres termes, pour tout couple de mots I et J, $I E_U J$ si IRJ. Le nombre des classes d'équivalence engendrées par E_U est inférieur ou égal à $\#(S)\,\#(Z)$ et par conséquent fini. En vertu du Théorème 5 du paragraphe 4.4., U est régulier. Donc $Z_2 \subseteq Z_1$, et en définitive $Z_2 = Z_1$.

Pour le restant de ce paragraphe, Δ est l'ensemble $\{0,1,\ldots,m-1\}$, m étant un entier fixé $\geqslant 2$.

Définition 2

Un 3-automate est un 7-uplet $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$ qui satisfait les conditions suivantes :

(i) δ est une application de $S \times \Sigma$ dans S,

(ii) λ est une application de $S \times \Sigma$ dans Δ, (cf. § 5.2.a),

(iii) s_o est dans F, et F est un ensemble de couples ordonnés (q,E) d'éléments $q \in S$ et $E \in \Delta$.

Notation

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$ un 3-automate. Désignons par $T(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ ayant la propriété $(\delta(p,\sigma_k),\ \lambda(p,\sigma_k)) \in F$:

$$T(\mathcal{A}) = \{(\sigma_1 \cdots \sigma_k)\ ;\ (\delta(p,\sigma_k),\ \lambda(p,\sigma_k)) \in F,$$

où

$$p = \delta^*(s_o,\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1})\}.$$

Soit Z_3 la famille des $T(\mathcal{A})$ pour les 3-automates .

Un 3-automate est un mécanisme de reconnaissance, ayant une fonction de sortie qui différencie les mots à l'aide des états finals et des sorties finales.

Lemme 2

$$Z_3 = Z_1.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$ un 1(automate. Considérons le 3-automate $\mathcal{B} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$ où :

(i) $\lambda(q,\sigma) = 1$ si $\delta(q,\sigma) \in F$;
(ii) $\lambda(q,\ ) = 0$ si $\delta(q,\sigma) \notin F$;
(iii) $H = \{(p,1)\ ;\ p \in F\}$.

Alors $T(\mathcal{B}) = T(\mathcal{A})$, donc $(Z_2 =) Z_1 \subseteq Z_3$.

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$ un 3-automate. On montre facilement, par une méthode semblable à celle utilisée dans le Lemme 1, que $T(\mathcal{A})$ est un ensemble régulier. On a donc $Z_3 \subseteq Z_2$, d'où

$$Z_3 = Z_2 = Z_1.$$

Définition 3

Un 4-automate est un 3-automate :

$$\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, s_0, F \rangle$$

où, pour un élément fixé $E \in \Delta$, $F = \{(q,E) ; q \in S\}$.

Si $\mathcal{A}$ est un 4-automate, alors $\mathcal{A}$ est un 3-automate. Cela définit $T(\mathcal{A})$. L'ensemble $T(\mathcal{A})$ est constitué des mots, qui, pour le 4-automate initialement à l'état s_0, mènent à une sortie finale fixée E.

Notation

Soit Z_4 la famille des $T(\mathcal{A})$ pour les 4-automates $\mathcal{A}$.

Lemme 3

$$Z_4 = Z_1.$$

Démonstration

Z_4 est, par définition, un sous-ensemble de Z_3. Pour montrer l'inclusion inverse, soit $\mathcal{A} = \langle S; \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, s_0, F \rangle$ un 3-automate. Soit $H = \{(q,1) ; q \in S\}$. Si $q \in S$ et $\sigma \in \Sigma$, définissons $\lambda_{\mathcal{B}}(q,\sigma) = 1$ si $(\delta(q,\sigma), \lambda(q,\sigma)) \in F$ et $\lambda_{\mathcal{B}}(q,\sigma) = 0$ sinon. Considérons le 4-automate $\mathcal{B} = \langle S, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda_{\mathcal{B}}, s_0, H \rangle$. La relation $\sigma_1 \cdots \sigma_k \in T(\mathcal{A})$ est équivalente à $(\delta(q,\sigma_k), \lambda(q,\sigma_k)) \in F$, où $q = \delta^*(s_0, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1})$. Cela est équivalent à $(\delta(q,\sigma_k), \lambda_{\mathcal{B}}(q,\sigma_k)) \in H$, qui, à son tour, est équivalent à $\sigma_1 \cdots \sigma_k \in T(\mathcal{B})$. D'où $Z_3 \subseteq Z_4$. On a donc $Z_4 = Z_3 = Z_1$.

Le cinquième et dernier type d'automate que nous décrivons est le suivant :

Définition 4

Un 5-automate est un 7-uplet $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, s_0, F \rangle$ qui satisfait les conditions suivantes :

(i) δ est une application de $S \times \Sigma$ dans S,

(ii) λ est une application de $S \times \sum$ dans Δ,

(iii) s_o est un élément de S, et F est un ensemble fini de suites finies non vides $E^1 \ldots E^r$ d'éléments de Δ (r dépend de la suite de F et n'est pas nécessairement fixé).

Notation

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$ un 5-automate. Désignons par $T(\mathcal{A})$ l'ensemble des mots $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ tels que la suite des sorties $\lambda^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$ s'achève en une suite qui soit dans F. Soit Z_5 la famille des $T(\mathcal{A})$ pour tous les 5-automates $\mathcal{A}$.

Un 5-automate est un mécanisme qui reconnaît un mot par l'extrémité terminale de la suite des sorties.

Lemme 4

$$Z_5 = Z_1.$$

Démonstration

On a évidemment $Z_1 = Z_4 \subseteq Z_5$. Pour montrer l'inclusion inverse, soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$ un 5-automate. Soit $E^1, \ldots, E^r$ un élément arbitraire de F. Nous montrerons que l'ensemble U des mots $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ pour lesquels la suite des sorties $\lambda^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$ se termine en $E^1 \ldots E^r$ est régulier. Comme $E^1 \ldots E^r$ est un élément quelconque de F, il en résultera qu'il existe une famille finie $\{U_1, \ldots, U_t\}$ d'ensembles réguliers tels que $T(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^{t} U_i$. Il s'ensuivra que $T(\mathcal{A})$ est un ensemble régulier, c'est-à-dire que $Z_5 \subseteq Z_1$, d'où $Z_5 = Z_1$.

Pour montrer que U est régulier, considérons la relation R définie comme suit : $I = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, $J = \tau_1 \cdots \tau_m$, I R J si et seulement si $k \geqslant r$, $m \geqslant r$, $\delta^*(s_o, I) = \delta^*(s_o, J)$,

$\lambda^*(p, \sigma_{k-r+1} \cdots \sigma_k) = \lambda^*(q, \tau_{m-r+1} \cdots \tau_m)$, où $p = \delta^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-r})$ et $q = \delta^*(s_o, \tau_1 \cdots \tau_{m-r})$. Evidemment R est une relation

d'équivalence. Le nombre des classes d'équivalence engendrées par R est inférieur ou égal à $\#(S)\,\#(\sum)^r+L$, où L est le nombre de mots de longueur inférieure à r. Soit E_U la relation d'équivalence invariante à droite définie au (iii) du Théorème 5 du paragraphe 4.4. On voit, comme dans le Lemme 1, que E_U est d'indice fini ; U est donc régulier.

Remarque 1

Si la définition d'un 5-automate est prolongée de façon que F soit un ensemble infini de mots, alors le Lemme 4 n'est plus vrai. Ainsi, soit $S = \{s_o\}$, $\sum = \{a,b\}$, $\delta(s_o,a) = \delta(s_o,b) = s_o$ $\lambda(s_o,a) = E^o$, et $\lambda(s_o,b) = E^1$. Soit F l'ensemble infini :

$$F = \{ (E^o)^n(E^1)^n \; ; \; n \geqslant 1\}.$$

Considérons $T(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \{E^o,E^1\}, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$. Alors $T(\mathcal{A}) = \{(a)^n(b)^n \; ; \; n \geqslant 1\} \cup \{X(a)^n(b)^n \; n \geqslant 1\}^{\forall X}$. On montre que $T(\mathcal{A})$ n'est plus régulier.

6.2. Automates incomplets

Si $1 \leqslant n \leqslant 5$, chaque n-automate est un automate complet en ce sens que δ (et λ, lorsque c'est le cas) est une fonction définie sur $S \times \sum$ tout entier. Nous considérerons maintenant des n-automates incomplets, en ce sens que δ (où λ, lorsque c'est le cas) est défini sur un sous-ensemble de $S \times \sum$. Ainsi, par définition, un automate complet est aussi un automate incomplet.

Définition 5

Un 1-automate incomplet est un 5-uplet :

$$\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle,$$

où δ applique un sous-ensemble de $S \times \sum$ dans S, s_o est un élément de S, et F est un sous-ensemble de S. La fonction $\delta^*(s,x)$ est également définie pour certains couples (s,x), $s \in S$, $x \in \sum^*$.

Notation

Pour tout 1-automate incomplet $\mathcal{A}$, désignons par $T(\mathcal{A})$ l'ensemble des mot x ayant la propriété que $\delta^*(s_0, x)$ existe et est dans F. On dit que x est accepté par $\mathcal{A}$. D'une façon analogue, x est rejeté par $\mathcal{A}$ $(x \in R)(\mathcal{A})$ si $\delta^*(s_0, x)$ est défini et appartient à S-F. On peut avoir pour un automate incomplet

$$R(\mathcal{A}) \cup T(\mathcal{A}) \neq \sum^*.$$

Un automate incomplet $\mathcal{B}$ inclut $\mathcal{A}$ si $T(\mathcal{A}) \subseteq T(\mathcal{B})$ et $R(\mathcal{A}) \subseteq R(\mathcal{B})$.

Désignons par $\overline{Z_1}$ la famille des $T(\mathcal{A})$ pour tous les 1-automates incomplets $\mathcal{A}$.

Comme 1-automate incomplet est un automate non-déterministique, il existe pour chaque 1-automate incomplet $\mathcal{A}$ un 1-automate complet tel que $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$. D'où

Lemme 5

$$\overline{Z_1} = Z_1.$$

Les définitions d'un 2-automate incomplet $\mathcal{A}$, de $T(\mathcal{A})$, et de $\overline{Z_2}$ sont analogues aux définitions d'un 1-automate incomplet $\mathcal{A}$, de $T(\mathcal{A})$ et de $\overline{Z_1}$. En tenant compte du Lemme 5 et de la méthode de démonstration du Lemme 1, on arrive au

Lemme 6

$$\overline{Z_2} = Z_1.$$

Nous introduirons maintenant les 3-automates incomplets et les 4-automates incomplets en définissant δ et λ comme applications de sous-ensembles de $S \times \sum$ dans S et Δ, respectivement. Pour ces automates incomplets $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_0, F \rangle$, $T(\mathcal{A})$ est

défini comme étant l'ensemble des mots $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $\delta^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$ existe ;

(ii) $\lambda^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_k)$ existe ;

(iii) $(\delta(q, \sigma_k), \lambda(q, \sigma_k)) \in F$, où $q = \delta^*(s_o, \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1})$.

Les familles résultantes d'ensembles de $T(\mathcal{A})$ seront désignées par $\overline{Z_3}$ et $\overline{Z_4}$ respectivement. A l'aide d'une légère modification du Lemme 2 et du Lemme 3, et en utilisant le Lemme 5 et le Lemme 6, on peut montrer que $\overline{Z_3} = \overline{Z_4} = Z_1$. Des commentaires semblables sont valables pour les 5-automates incomplets, avec le résultat final $\overline{Z_5} = Z_1$.

En résumé, on a le

Théorème 1

$$Z_x = \overline{Z}_y \quad \text{si} \quad 1 \leqslant x, y \leqslant 5.$$

Remarques

2. Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$, où F est un ensemble Δ-régulier. L'ensemble des mots x tels que $\lambda^*(s_o, x) \in F$ est $\sum$-régulier.

3. Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \Delta, \delta, \lambda, s_o, F \rangle$, où F est un ensemble Δ-régulier. L'ensemble des mots x tels que $\lambda^*(s_o, x)$ se termine en une suite appartenant à F est $\sum$-régulier. Cela généralise le Lemme 4.

4. Minimiser le nombre des états internes d'un automate incomplet $\mathcal{A}$, consiste à trouver un automate incomplet $\mathcal{B}$ incluant et ayant le plus petit nombre d'états possibles. Les estimations faites sur les procédures existantes donnent jusqu'à 2^{2^n} pas. Cela montre que même pour des questions qui sont triviales du point de vue de la théorie des fonctions récursives, comme c'est le cas ici, il subsiste le problème pratique de trouver des algorithmes conduisant à un volume de calculs

raisonnable.

6.3. Automates à mouvement dans les deux sens

Dans tous les mécanismes étudiés jusqu'ici, les rubans (mots) défilaient devant la tête de lecture dans un seul sens, et plus précisément de droite à gauche. L'entrée suivante était toujours située immédiatement à droite de l'entrée courante. Nous considérerons maintenant un mécanisme dans lequel des rubans défilent dans les 2 sens ; cela signifie qu'une entrée de ruban peut être utilisée plus d'une fois. Le mécanisme continue à fonctionner jusqu'à ce que le ruban sorte du mécanisme soit à gauche, soit à droite. Le mécanisme accepte un ruban si celui-ci sort par son extrémité droite, et simultanément, si l'état terminal est un élément appartenant à un ensemble spécifié.

Définition 6

Soit $L = \{-1,0,1\}$. Un automate à mouvement dans les 2 sens (ou automate à deux sens) est un 5-uplet $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$, où δ est une application de $S \times \sum$ dans $L \times S$, s_o est élément de S, et F est un sous-ensemble de S.

On suppose que $\delta(q,\Lambda) = (1,q)$ pour tout état q.

Un automate $\mathcal{A}$ à deux sens opère comme suit. Etant donné un ruban, c'est-à-dire une suite finie linéaire de symboles appartenant à l'alphabet $\sum$, $\mathcal{A}$ est positionné à l'état s_o, lit le premier symbole le plus à gauche. A chaque étape, si l'état est s, si le symbole lu est σ, et si $\delta(s,\sigma) = (p,s')$, où p est un des chiffres $-1,0,1$, alors la tête de lecture se déplacera d'un cran à gauche, restera fixe, ou se déplacera d'un cran à droite suivant que $p = -1,0,1$; ensuite, $\mathcal{A}$ sera à l'état s' !.

Si opérant ainsi, le ruban sort par son extrémité droite et si $\mathcal{A}$ est à ce moment dans un état appartenant à F, on dira que le ruban est accepté par $\mathcal{A}$.

D'où la

Notation

Désignons, pour tout automate à deux sens, par $T(\mathcal{A})$, l'ensemble des mots $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ tels qu'il existe un entier $m > 0$, une suite d'entiers $b_1, \ldots, b_{m+1}$, et une suite $s_o = q_1, \ldots, q_{m+1}$ d'éléments de S ayant les propriétés suivantes :

(i) $b_1 = 1$;

(ii) $1 \leqslant b_i \leqslant k$ pour $i = 1, \ldots, m$;

(iii) $b_{m+1} = k+1$ et $q_{m+1} \in F$;

(iv) $(b_{i+1} - b_i, q_{i+1}) = \delta(q_i, \sigma_{b_i})$ pour $i = 1, \ldots, m$.

En particulier, la suite vide Λ appartient à $T(\mathcal{A})$ si et seulement si s_o appartient à S.

La suite $b_1, \ldots, b_{m+1}$ représente la suite des positions du ruban lorsque celui-ci est introduit dans le mécanisme. L'entier $b_{i+1} - b_i$ indique le changement de position de la tête de lecture entre le moment i et le moment $i+1$. Les conditions (ii) et (iii) signifient que le ruban ne sort pas de l'automate avant le moment $m+1$.

Le fait essentiel concernant les problèmes de la reconnaissance, est que les automates à deux sens ne sont pas plus puissants que les automates à un sens.

Théorème 2(*)

Pour chaque automate à deux sens $\mathcal{A}$, $T(\mathcal{A})$ est un ensemble régulier.

Démonstration

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F \rangle$ un automate à deux sens.

(*) La démonstration de ce théorème est dûe à J.C. SHEPHERDSON [43].

Pour montrer que $T(\mathcal{A})$ est régulier, considérons la relation E_U définie au (iii) du Théorème 5 du paragraphe 4.4. C'est-à-dire que l'on écrit pour deux mots X_1 et X_2, $X_1 E_U X_2$ si : $X_1 X \in T(\mathcal{A})$ si et seulement si $X_2 X \in T(\mathcal{A})$ pour tout mot. Nous montrerons que la relation E_U invariante à droite est d'indice fini. Il résultera en vertu du Théorème 5 que $T(\mathcal{A})$ est régulier.

Soit p_1 un symbole n'appartenant pas à S. Pour chaque mot $X = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, définissons une application τ_X de $\{p_1\} \cup S$ dans $\{p_1\} \cup S$ comme suit : pour chaque état $q \in S$, soit $\tau_X(q) = q'$ si $\mathcal{A}$, démarré à q sur le symbole le plus à droite de X, voit finalement le ruban le quitter par la droite, en allant dans l'état q' ; et soit $\tau_X(q) = p_1$ sinon. Soit $\tau_X(p_1) = q'$ si $\mathcal{A}$, démarré à s_o sur le symbole le plus à gauche de X, voit finalement le ruban le quitter par la droite, en allant dans l'état q' ; et soit $\tau_X(p_1) = p_1$ sinon.

On vérifie finalement que $X_1 E_U X_2$ si $\tau_{X_1} = \tau_{X_2}$. Le nombre des classes d'équivalence engendrées par E_U est donc inférieur ou égal au nombre des fonctions distinctes τ_X. Comme $\#(\{p_1\} \cup S) = \#(S)+1$, il existe au plus $[\#(S)+1]^{\#(S)+1}$ fonctions distinctes τ_X. Par conséquent E_U est d'indice fini.

Remarque 5

La signification de ce théorème est que pour tout automate à deux sens, il existe un 1-automate $\overline{\mathcal{A}}$ tel que $T(\mathcal{A}) = T(\overline{\mathcal{A}})$. Rabin et Scott [40] en donnent une démonstration constructive en montrant que $\overline{\mathcal{A}}$ peut effectivement être obtenu à partir de $\mathcal{A}$. Il en résulte le

Corollaire 1

Le problème de l'équivalence pour les automates à deux sens est effectivement résoluble.

Démonstration

Etant donné deux automates à deux sens, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on construit

- pour décider si $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$ - des 1-automates $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{B}}$ tels que $T(\overline{\mathcal{A}}) = T(\mathcal{A})$ et $T(\overline{\mathcal{B}}) = T(\mathcal{B})$. En vertu de la remarque 4, cela peut être fait effectivement. On applique ensuite à $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{B}}$ la procédure donnée dans le Corollaire 4 du paragraphe 5.2. b.

6.4. Automates à deux rubans

Nous considérons maintenant un mécanisme de reconnaissance ayant deux rubans. Un automate à deux rubans a deux "têtes" et "lit" un couple (X_1,X_2) de rubans. Le fonctionnement de $\mathcal{A}$ est le suivant : on alimente la machine avec un ruban pendant un certain temps, puis avec l'autre, ensuite avec le premier, etc... jusqu'à ce que l'un des rubans soit en position terminale. Alors $\mathcal{A}$ s'arrête et le couple (X_1,X_2) est accepté si et seulement si $\mathcal{A}$ est dans un état final désigné.

Définition 7

Un automate à deux rubans est un 7-uplet :

$$\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F, C_1, C_2 \rangle ,$$

où $\langle S, \Sigma, \delta, s_o, F \rangle$ est un automate, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ et $C_1 \cup C_2 = S$.

Les états de C_1 concernant le premier ruban et les états de C_2 le second.

Notation

Soit $\mathcal{A}$ un automate à deux rubans et soit $s_o,\ldots,s_t$ une suite d'états. Il existe alors un couple unique de suites associées d'entiers $(u_o,\ldots,u_t ; v_o,\ldots,v_t)$ telle que :

(i) u_i est soit égal à 1 soit égal à 2 suivant que $s_i \in C_1$ ou $s_i \in C_2$;

(ii) v_i est le nombre d'indices $j \leq i$ tels que $s_j \in C_{u_i}$.

Les entiers u_i et v_i réalisent la fonction suivante : u_i suit l'ensemble C_1 ou C_2 auquel appartient l'état courant s_i ; v_i suit la position de l'entrée sur le ruban qui est en train d'être lu.

Définition 8

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F, C_1, C_2 \rangle$ un automate à deux rubans. Le couple $(X_1, X_2) = (\sigma_{11} \cdots \sigma_{1m}, \sigma_{21} \cdots \sigma_{2n})$ de rubans est dit accepté par $\mathcal{A}$ s'il existe une suite (unique) d'états $s_o, \ldots, s_t$ et un couple de suites associées d'entiers $(u_o, \ldots, u_t ; v_o, \ldots, v_t)$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $s_i = \delta(s_{i-1}, \sigma_{u_i} - v_i - 1)$ pour $i = 1, \ldots, t$;

(ii) $s_t \in F$;

(iii) si $u_t = 1$, alors $v_t = m+1$, et si $u_t = 2$ alors $v_t = n+1$.(*)

L'ensemble des couples acceptés de rubans (X_1, X_2) est désigné par $T_2(\mathcal{A})$.

Par comparaison avec ce que l'on sait sur les ensembles réguliers, on a très peu de connaissances sur la structure de $T_2(\mathcal{A})$. Nous verrons (Théorème 4) que la famille des ensembles définissables (ou acceptés) par les automates à deux rubans (i) est fermée par rapport

---

(*) Dans M.O. RABIN et D. SCOTT [40] la condition (iii) est remplacée par la suivante :

(iv) si $u_t = 1$, alors $v_t = m$, et si $u_t = 2$ alors $v_t = n$.

Lorsqu'on utilise (iv) au lieu de (iii), σ_{1m} et σ_{2n} sont les marqueurs de fin de ruban et ne se trouvent pas dans $\sum$; il n'y a plus alors d'état suivant. Il y a de légères différences dans les effets de (iii) et (iv).

Théorème 3

Soit $\mathcal{A} = \langle S, \sum, \delta, s_o, F, C_1, C_2 \rangle$ un automate à deux rubans ; l'ensemble des rubans X_1 pour lesquels il existe un ruban X_2 tel que $(X_1, X_2) \in T_2(\mathcal{A})$ est un ensemble régulier.

Démonstration

Soit D l'ensemble des rubans X_1 pour lesquels il existe un ruban X_2 tel que $(X_1, X_2) \in T_2(\mathcal{A})$. Nous construirons un automate non-déterministique tel que $D = T(\mathcal{B})$.

On appelle ruban de transition relatif à (q_2, q_1), où $q_1 \in C_2$, $q_2 \in C_2$, un ruban $X = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ satisfaisant la condition suivante,: soit, pour chaque i, $p_i = \delta^*(q_2, \sigma_1 \cdots \sigma_i)$; il existe alors un entier u tel que $p_u = q_1$ et $p_j \in C_2$ si $j < u$. Nous désignerons par $X(q_2, q_1)$ le ruban de transition relatif à (q_2, q_1) - s'il en existe - de longueur minimum.

On appelle l'état $q_2 \in C_2$ état finalisant s'il existe un ruban $X(q_2) = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ satisfaisant la condition suivante : pour tout i, soit $p_i = (q_2, \sigma_1 \cdots \sigma_i)$; alors chaque $p_i \in C_2$ et $p_k \in F \cap C_2$.

Soit $\mathcal{B}$ l'automate non-déterministique $\langle S_{\mathcal{B}}, \sum, \delta_{\mathcal{B}}, \delta_o, G \rangle$ défini comme suit : soit q_o un symbole abstrait n'appartenant pas à $S_{\mathcal{A}}$ et soit $S_{\mathcal{B}} = C_1 \cup \{q_o\}$. Soit $\delta_{\mathcal{B}}$ une fonction définie comme suit pour tout $\sigma \in \sum$ et $q \in C_1$:

(i) $\delta_{\mathcal{B}}(q_o, \sigma) = \{q_o\}$

(ii) $\delta_{\mathcal{B}}(q_o, \sigma) = \{\delta_{\mathcal{A}}(q, \sigma)\}$ si $\delta_{\mathcal{A}}(q, \sigma) \in C_1$;

(iii) $\delta_{\mathcal{B}}(q, \sigma) = \{q_o\}$ si $\delta_{\mathcal{A}}(q, \sigma)$ est un état finalisant dans C_2 ;

(iv) $\delta_{\mathcal{B}}(q,\sigma) = \delta_{*}(q,\sigma)$ si $\delta_{\mathcal{A}}(q,\sigma)$ est dans C_2 et n'est pas un état finalisant.

$\delta_{*}(q,\sigma)$ est ici l'ensemble des états q_1 tel qu'il exsite un ruban $X(\delta_{\mathcal{A}}(q,\sigma), q_1)$.

L'ensemble S_o d'états de départ de $\mathcal{B}$ est $\{s_o\}$ si $s_o \in C_1$, et est l'ensemble des q_1 tels qu'il existe un ruban $X(s_o,q_1)$ si $s_o \in C_2$. Finalement, soit $G = (C_1 \cap F) \cup \{q_o\}$. On montre facilement que $T(\mathcal{B}) = D$. On peut montrer, en utilisant les Corollaires 1 et 2 du paragraphe 5.1.

Corollaire 2

Il existe des procédures finies grâce auxquelles, étant donné un automate $\mathcal{A}$ à deux rubans, on peut décider en un nombre fini de pas si $T_2(\mathcal{A})$ est vide ou s'il est infini.

Nous considérons maintenant la famille des ensembles définisables par les automates à deux rubans.

Théorème 4

La famille des ensembles définissables par les automates à deux rubans est :

(i) fermée pour la complémentation ;

(ii) non fermée pour l'intersection et la réunion des ensembles

Démonstration

(i) supposons qu'on se donne $T_2(\mathcal{A})$, d'où :

$$\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, F, C_1, C_2 \rangle .$$

Alors $\Sigma^* \times \Sigma^* - T_2(\mathcal{A}) = T_2(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = \langle S, \Sigma, \delta, s_o, S\text{-}F, C_1, C_2 \rangle$.

(ii) soit $\mathcal{A} = \langle S_{\mathcal{A}}, \Sigma, S_{\mathcal{A}}, q_1, \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2, q_3\} \rangle$ où $\delta_{\mathcal{A}}$ est représenté dans la Figure 1. Alors

	a	b
q_1	q_2	q_3
q_2	q_1	q_4
q_3	q_4	q_1
q_4	q_4	q_4

Figure 1

$T_2(\mathcal{A}) = \{(J, JX) ; \forall J, X\}$.

Soit :

$\mathcal{B} = \langle S_{\mathcal{B}}, \Sigma, \delta_{\mathcal{B}}, p_1, \{p_4\}, \{p_1, p_2, p_4, p_6\}, \{p_3, p_5\} \rangle$

où $\delta_{\mathcal{B}}$ est représenté dans le Figure 2.

Alors :

$T_2(\mathcal{B}) = \{((a)^i(b)^n, (a)^n X ; i \geqslant 1, n \geqslant 1, \forall X\}$.

	a	b
p_1	p_2	p_5
p_2	p_2	p_3
p_3	p_4	p_5
p_4	p_5	p_3
p_5	p_5	p_5

Figure 2

Supposons que :

$T_2(\mathcal{C}) = T_2(\mathcal{A}) \cap T_2(\mathcal{B})$

$= \{((a)^n(b)^n , (a)^n(b)^n Y ; n \geqslant 1, \forall Y\}$,

pour un automate à deux rubans $\mathcal{C}$. En vertu du Théorème 3, l'ensemble

$\{(a)^n(b)^n ; n \geqslant 1\}$ est régulier. Mais, comme le montre l'Exemple 1 du paragraphe 4.4. cet ensemble n'est pas régulier. Par conséquent $T_2(\mathcal{A}) \cap T_2(\mathcal{B})$ n'est pas l'ensemble des couples de rubans acceptés par un automate à deux rubans. La famille n'est donc pas fermée pour l'intersection. Comme la fermeture pour la complémentation et la réunion implique la fermeture pour l'intersection, la famille n'est pas formée pour la réunion.

Remarques

6. On montre, en utilisant un théorème de POST, que le problème de l'intersection est indécidable, c'est-à-dire qu'étant donné deux automates finis à deux rubans $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, le problème de savoir si on a $T(\mathcal{A}_1) \cap T(\mathcal{A}_2) = \emptyset$ n'est pas effectivement résoluble.

7. On démontre également qu'il n'existe pas de méthode effective pour décider si un ensemble de rubans définissable par un automate à deux rubans et à deux sens est vide ou ne l'est pas, mais que cet ensemble est fermé pour des opérations booléennes. Ceci entraîne, en vertu, du Théorème 4 de ce paragraphe qu'il existe des ensembles définissables par des automates à deux sens qui ne sont définissables par aucun 1-automate ; ainsi il n'existe pas d'analogue du Théorème 2 du paragraphe 6.3..

6.5. Automates à arbres

Les entrées des automates précédents avaient une structure linéaire. Une extension importante consiste à passer à des structures arborescentes. Nous appelerons de tels automates des automates(finis) à arbres (a.f.a.). Nous nous limiterons ici aux arbres binaires. On pourrait généraliser à des arbres ayant des embranchements d'ordre supérieur (mais borné) ; cela donnerait lieu à une formulation impliquant des algèbres d'un type particulier (voir S. EILENBERG et J.B. WRIGHT [8]).

Considérons d'abord les automates ordinaires. Soit $\mathcal{A} = \langle S, \Sigma, \delta, s_0, F \rangle$ un a.f., soit $x = \sigma_0\sigma_1\sigma_2 \in \Sigma^*$. On peut

considérer x comme un graphe linéaire valué par des éléments $\sigma \in \sum$. Ainsi il correspond à x le graphe linéaire valué (a) de la Figure 3.

Figure 3

Le noeud le plus bas est la <u>racine</u> du graphe et le noeud le plus haut est le <u>noeud terminal</u>. Remarquons que le noeud terminal n'est pas valué. Si $\delta(s_i,\sigma_i) = s_{i+1}, i = 0,1,2$ alors la Figure 3 (b) décrit le comportement de $\mathcal{A}$.

Définissons maintenant δ comme une fonction δ $S \times S \times \sum \longrightarrow S$. Ainsi $\delta(s_1,s_2,\sigma \in S$ si $s_1,s_2 \in S$, $\sigma \in \sum$. Tandis que la transition de base d'un **a.f.**est représentée par la Figure 4 (a), celle d'un a.f.a. est représentée par la Figure (4) b où deux états sont combinés suivant un nouvel état en un noeud inférieur.

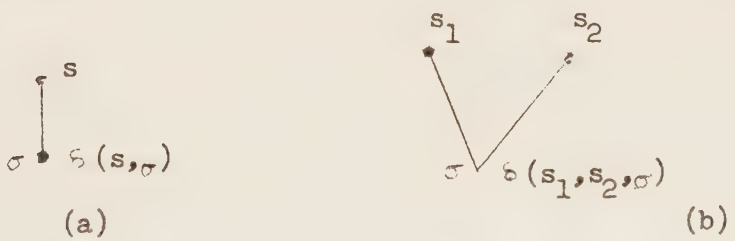


Figure 4

Soit alors $\mathcal{A}$ un a.f.a. Les entrées de $\mathcal{A}$ seront des arbres binaires finis des noeuds valués par $\sum$. La figure 5 décrit le comportement de $\mathcal{A}$ sur un arbre valué (remarquons que les noeuds terminaux ne sont pas valués). Ici $\delta(s_o, s_o, \sigma_1) = s_1$, $\delta(s_2, s_o, \sigma_5) = s_5$, $\delta(s_3, s_5, s_4) = s_4$ etc.

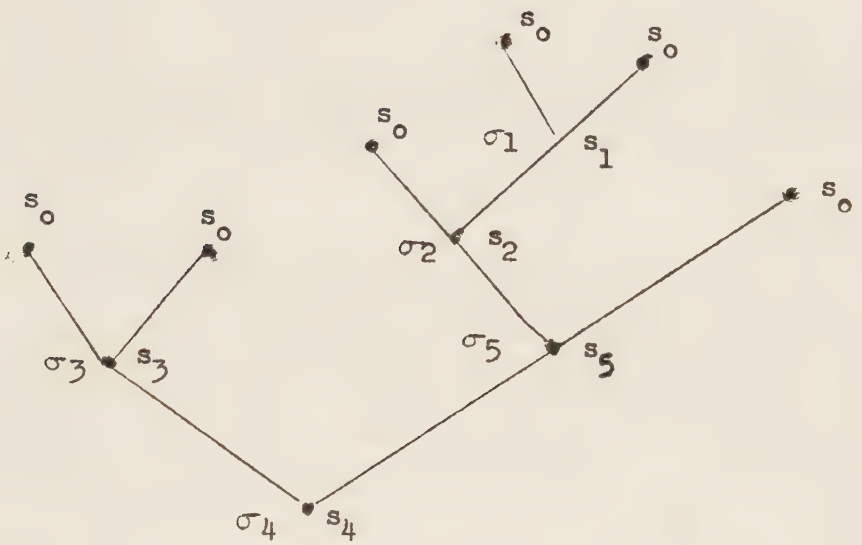


Figure 5

1. Arbres binaires

Il est nécessaire de définir les arbres binaires de manière telle que, non seulement leur structure topologique, mais aussi leur structure gauche-droite soit parfaitement apparente. Nous définirons les arbres comme des ensembles de mots sur l'alphabet $\Omega = \{0,1\}$.

Soient $x,y \in \Omega^*$; x s'appelle un préfixe s'il existe un $z \in \Omega^*$ tel que $y = xz$. Un sous-ensemble $H \subseteq \Omega^*$ est fermé par rapport aux préfixes si $y \in H$ et x préfixe de y entraînent $x \in H$. La clôture par rapport aux préfixes d'un ensemble $G \subseteq H^*$ est le plus petit ensemble H formé par rapport aux préfixes tel que $G \subseteq H$. Tout ensemble fermé par rapport aux préfixes contient Λ.

Un arbre (binaire) est un sous-ensemble fermé par rapport aux préfixes $H \subseteq \Omega^*$. Les éléments $x \in H$ sont les noeuds de H. Le noeud $\Lambda \in H$ est la racine de l'arbre. Si $x \in H$ et $x0 \notin H, x1 \notin H$, x est appelé un noeud terminal H est un arbre frontière si quel que soit le

noeud non-terminal $x \in H$ on a $x0 \in H$ et $x1 \in H$.

On voit facilement comment les arbres binaires $H \subseteq \Omega^*$ représentent les arbres géométriques. Supposons que 0 représente "la gauche", et 1 "la droite". L'arbre de la Figure 5 est donné par la fermeture par rapport aux préfixes H de l'ensemble $G = \{00, 01, 100, 1010, 1011, 11\}$; H est frontière.

Nous nous limiterons dorénavant aux arbres frontières finis $H \subset \Omega^*$. Désignons par Ft(H) l'ensemble de tous les noeuds terminaux d'un tel arbre H.

2) Automates à arbres

Un arbre $\sum$-valué est un couple (v,H), où H est un arbre frontière fini et v une fonction $v : (H\text{-}Fr(H)) \longrightarrow \sum$ associant à chaque noeud non-terminal $x \in H$ un symbole $v(x) \in \sum$. Désignons l'ensemble des arbres valués par $V(\sum, \Omega)$.

Définition 9

Un automate fini à arbres (a.f.a.) est un système $\mathcal{A}_a = < S, \sum, \delta_a, s_o, F >$, où $S, \sum, s_o, F$ sont comme dans la Définition 1 du paragraphe 4.2., et δ_a est une fonction $\delta_a : S \times S \times \sum \longrightarrow S$.

Définition 10

On dit que l'a.f.a. accepte $(v,H) \in V(\sum, \Omega)$ s'il existe une fonction $\phi : H \longrightarrow S$ satisfaisant :

(i) $\phi(x) = s_o$ si $x \in Fr(H)$,

(ii) si $x \in H\text{-}Fr\ H$ (donc $x0, x1 \in H$) alors $\phi(x)$

$= \delta_a(\phi(x,0), \phi(x1), v(x))$,

(iii) $\phi(\Lambda) \in F$.

L'ensemble des arbres acceptés par $\mathcal{A}_a$ est désigné par $T(\mathcal{A}_a)$ et appelé l'ensemble <u>défini</u> par $\mathcal{A}_a$. Un ensemble $T \subseteq V(\sum, \Omega)$ est <u>définissable</u> a.f.a. s'il existe un $\mathcal{A}_a$ tel que $T = T(\mathcal{A}_a)$.

Remarquons le rôle que joue dans la condition (ii) le fait que H est frontière. La fonction ϕ satisfaisant (i)—(iii) est unique.

Reportons nous à la Figure 5 qui a servi à illustrer la définition générale. On a $v(10) = \sigma_2$, $\phi(10) = s_2$, $v(\wedge) = \sigma_4$, $\phi(\wedge) = s_4$, etc...

On définit les <u>a.f.a. non-déterministiques</u> par analogie avec les a.f. (paragraphe 4.3.). En utilisant une notion appropriée comparable à celle de la fonction $\phi : H \longrightarrow S$, compatible avec (v,H), on peut à nouveau introduire l'ensemble $T(\mathcal{A}_a)$ <u>défini</u> par un a.f.a. non-déterministique $\mathcal{A}_a$.

Les résultats essentiels des a.f. restent vrais dans le cas des a.f.a. et les mêmes démonstrations se généralisent. Il s'ensuit que :

La classe des sous-ensembles $T \subseteq V(\sum, \Omega)$ définissables par a.f.a. est une algèbre booléenne. Il existe pour tout a.f.a. non-déterministique $\mathcal{A}_a$ un a.f.a. déterministique $\mathcal{B}$ tel que $T(\mathcal{A}_a) = T(\mathcal{B})$. Le problème de savoir si $T(\mathcal{A}_a)$ est vide ou infini est résolvable pour les a.f.a.

3) <u>Arbres valués et termes</u>

Il existe une analyse des termes algébriques à l'aide des arbres. Cette procédure aboutit à une correspondance bi-univoque entre les termes et les arbres valués, que nous allons décrire.

Soit $T_o = (v_o, H_o)$ et $T_1 = (v_1, H_1)$ deux arbres $\sum$-valués et soit $\sigma \in \sum$. Les arbres H_o, H_1 peuvent être combinés en un arbre $H = \{\wedge\} \cup 0\,H_o \cup 1\,H_1$. <u>L'arbre valué combiné</u> $C(\sigma, T_o, T_1)$ est défini

comme étant (v,H), où H est comme ci-dessus et $v(\Lambda) = \sigma$, $v(0x) = v_0(x)$ si $x \in H_0$, $v(1x) = v_1(x)$ si $x \in H_1$.

Associons à chaque $\sigma \in \Sigma$ une fonction binaire symbolisée par F et soit u_c un symbole fixé. L'ensemble V_2 de tous les <u>termes</u> est défini comme étant le plus petit ensemble tel que $u_o \in V_2$, et si $t_o \in V_2$, et $T_1 \in V_2$ alors $F(t_o,t_1) \in V$ où $\sigma \in \Sigma$.

La correspondance biunivoque $\tilde{\Phi}$ entre $V(\Sigma,\Omega)$ et V_2 est donnée par la définition récursive

$$\tilde{\Phi}(\Lambda) = u_o, \tilde{\Phi}(C(\sigma,T_o,T_1)$$

$$= F_\sigma(\tilde{\Phi}(T_o), \tilde{\Phi}(T_1), \sigma \in \Sigma \; ; \; T_o,T_1 \in V(\Sigma,\Omega).$$

Le terme correspondant à l'arbre valué de la Figure 5 est (nous écrivons i au lieu de σ_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$)

$$F_u(F_3(u_o,u_o), F_5(F_2(u_o,F_1(u_o,u_o)), u_o)).$$

Un ensemble $K \subseteq V_2$ de termes est dit <u>définissable a.f.a.</u> si on a, pour un ensemble définissable $T \subseteq V(\Sigma,\Omega)$, $K = \tilde{\Phi}(T)$.

Si on considère les termes $t \in V_2$ comme des mots sur l'alphabet $\{F_\sigma ; \sigma \in \Sigma\} \cup \{u_o, \text{ " }, \text{ " }, (,)\}$, on voit que l'on a des ensembles définissables de termes qui ne sont pas toujours des ensembles réguliers au sens de la Définition 2 du paragraphe 4.2.

4) <u>Algébrisation des a.f.a.</u>

On peut donner une version algébrique de la théorie, qui est tout à fait analogue à la caractérisation des ensembles réguliers à la fin du paragraphe 4.4.

Un système $\langle A,a_o,f_\sigma \rangle_{\sigma \in \Sigma}$ est une <u>algèbre de type</u> Σ_2

si $a_o \in A$ et chaque f_σ , $\sigma \in \Sigma$, est une application $f_\sigma : A \times A \longrightarrow A$.

On a, en particulier, l'algèbre libre $F_{\Sigma_2} = \langle V_2, u_o, f_\sigma \rangle_{\sigma \in \Sigma}$ où f_σ est défini par $f_\sigma (t_o, t_1) = F_\sigma (t_o, t_1)$, $t_o, t_1 \in V_2$.
On obtient alors la caractérisation suivante :

Un ensemble $K \subseteq V_2$ est définissalbe par a.f.a. si et seulement s'il existe une algèbre finie $F = \langle A, a_o, \overline{f}_\sigma \rangle_{\sigma \in \Sigma}$ de type Σ_2, un homomorphisme $\varphi : F_{\Sigma_2} \longrightarrow F$ et un sous-ensemble $H \subseteq A$ tels que $K = \varphi^{-1}(H)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. AHO et J. ULLMAN. The Theory of languages. Math. Syst. Theory, vol. 2, n° 2, 1968.

[2] R.B. BANERJI. A language for pattern recognition. Pattern Recognition, vol. 1, 1968.

[3] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET. Théorie des fonctions aléatoires. Masson et Cie, 1953.

[4] N. BOURBAKI. Livre 1 : Théorie des ensembles, chapitres I, III, IV. Hermann, 1953, 1956, 1957.

[5] R. CLERICI, A. GRASSELLI, G. LEVI, A. MARTELLI, U. MONTANARI, F. SIROVICH. Image processing. Instituto di Elaborazione de la Informazione del C.N.R., Pisa, Nota interna B 68/8, 1968.

[6] A.H. CLIFFORD et G.B. PRESTON. The algebraic theory of semigroups. A.M.S. Surveys, vol. 1, n° 7, 1961 ; vol. II, n° 7, 1967.

[7] M. EDEN. On the formalization of handwriting. Appl. Math. Symp. AMS, vol. 12, 1961.

[8] S. EILENBERG et J.B. WRIGHT. Automata in general algebras. Inf. and Control., vol. 11, 1967.

[9] T.G. EVANS. A grammar-controlled pattern analyzer. IFIP Congress, 1968.

[10] W. FREIBERGER et U. GRENANDER. Computer generated image algebras. IFIP Congress, 1968.

[11] S. GINSBURG. Sets of tapes accepted by different types of automata. Journ. of ACM., Vol. 8, 1961.

[12] S. GINSBURG. An introduction to mathematical machine theory. Addison-Wesley, 1962.

[13] S. GINSBURG. The mathematical theory of contexte-free languages. Mc Graw Hill, 1966.

[14] A. GRASSELLI. On the automatic classification of fingerprints. Centro Studi Calcolatrici Electroniche del CNR, presso l'Università dé Pisa, Internal Report n° II-64, 1968.

[15] U. GRENANDER. Toward a theory of patterns. Symp. on probability methods in analysis, Springer Verlag, 1967.

[16] U. GRENANDER. Foundations of pattern analysis. IBM Technical Report n° 2 - Brown University, Div. of Appl. Math., 1967.

[17] U. GRENANDER. Linguistic tendencies in pattern analysis. Brown University, Div. of Appl. Math., 1968.

[18] W.C. HOFFMAN. The Lie algebra of visual perception. J. Math. Psy., vol. 3, 1966.

[19] R.A. KIRSCH. Computer interpretation of English text and picture patterns. Trans. IEEE, EC. 13, 1964.

[20] S.C. KLEENE. Representation of events in nerve nets and finite automata. Aut. Studies, Princeton Univ. Press, 1956.

[21] P.A. KOLERS et M. EDEN. Recognizing patterns. MIT Press, 1968.

[22] J.E. KULSRUD. A general purpose graphic language, Comm. A.C.M., vol. 11, n° 4, 1968.

[23] L.E. LIPKIN, W.C. WATT, R.A. KIRSCH. The analysis, synthesis and description of biological images. Ann. N.Y. Acad. Sci., vol. 128, 1966.

[24] E.S. LJAPIN. Semigroups. A.M.S., 1963.

[25] R.F. Mc NAUGHTON et H. YAMADA. Regular expressions and state graphs for automata. IRE Trans. on Electr. Comput., EC 9, 1960.

[26] G.H. MEALY. A method for synthesizing sequential circuits. Bell Syst. Tech. Journ., vol. 34, 1955.

[27] M. MINSKY. Finite and infinite machines. Prentice Hall, 1967.

[28] M. MINSKY et S. PAPERT. Linearly unrecognizable patterns. Proc. Symp. Appl. Math., vol. 19, A.M.S. 1967.

[29] H.F. MOORE. Gedanken-experiments on sequential machines. Automata Studies, Princeton Univ. Press, 1955.

[30] J. MYHILL. Finite automata and the representation of events. WADC Techn. Report, 1957.

[31] R. NARASHIMAN. Labelling schemata and syntactic descriptions of pictures. Inf. Cont., vol. 7, 1964.

[32] R. NARASHIMAN. Syntax-directed interpretation of classes of pictures. Comm. A.C.M., vol. 9, n° 3, 1966.

[33] R. NARASHIMAN et V.S.N. REDDY. A generative model for handprinted English letters and its computer implementation. ICC Bull, vol. 6, n° 4, 1967.

[34] A. NERODE. Linear automaton transformation. Proc. A.M.S., vol. 9, 1958.

[35] N. NILSON. Learning machines. Mc GRAW HILL, 1965.

[36] M. PAVEL-PARVU. Cours de reconnaissance des structures. Polycopié, Fac. Sci. Paris, Chaire de Calcul des Probabilités et Physique Mathématique, Enseignement de 3ème Cycle, 1967-1968.

[37] W. PITTS et Mc CULLOCH. How we know universals. The description of auditory and visual forms. Bull. Math. Biophysics, vol. 9 1947.

[38] M.O. RABIN. Probabilistic automata. Inf. and Control, vol. 6, 1963.

[39] M.O. RABIN. Mathematical theory of automata. Math Aspects of Comp. Sci., Proc. Symp. Appl. Math., vol. 19, A.M.S., 1967.

[40] M.O. RABIN. et D. SCOTT. Finite automata and their decision problems. IBM Journ. of Res. and Dev., vol. 3, 1959.

[41] J.E. RUBIO. The clustering and recognition of patterns. Int. J. Control, vol. 4, n° 5, 1966.

[42] G.S. SEBESTYEN. Decision making processes in pattern recognition. Mac Millan, 1962.

[43] J.C. SHEPHERDSON. The reduction of two-way automata to one-way automata. IBM Journal of Res. and Dev., vol. 3, 1959.

[44] H. SHERMAN. A quasi-topological method for the recognition of line patterns. Proc. Intern. Comp. Inf. Proc., 1959.

[45] J.R. ULLMAN. Associating parts of patterns. Inf. and Control vol. 9, 1966.

[46] J.R. ULLMAN. Algebraic inference of pattern similarity. The Comp. Journ., vol. 10, n° 3, 1967.

INDEX TERMINALOGIQUE

		Pages
A -	Accepté	II.18
	Admissible	1.9
	Algèbre	I.14
	- de Boole	II.17
	- de type $\sum$	II.28
	- de type $\sum_2$	II.76
	- libre de type $\sum_2$	II.28
	Alphabet (vocabulaire)	II.13
	Arbre	
	- accepté	II.74
	- binaire	II.73
	- frontière	II.73
	- racine d'un arbre	II.73
	- valué	II.75
	- valué combiné	II.75
	Automate fini (a.f.)	II.13
	- à arbres	II.71
	- à deux rubans	II.66
	- à mouvement dans les deux sens	II.65
	- associé à un a.f. non-déterministique	II.18
	- complet	II.60
	- incomplet	II.60
	- n-automate	II.54
	- non-déterministique	II.17
B -	Bande (mot, ruban)	II.12
	Base	I.19

Pages

C - Cardinal II.24

Classe paradigmatique I.7

Collapsible I.18

Complet I.27

Complexité I.12

Composantes connectées au maximum I.18

Compteur mod. n II.46

Configuration I.9

- grammaticale (admissible, significative) I.9
- libre I.11

Concaténation I.9 , II.12

Congruence I.13, II.23

Construction de distances I.39

- à partir d'une fonction d'effort I.40

Construction de fonctions de reconnaissance I.46

- à distance invariante I.47
- à partir d'une mesure de probabilité I.52

Covariance I.31

- en probabilité I.46

D - Décomposition

- des images I.21
- des images types I.21
- unicité de la décomposition I.22

Déformation I.30

- covariante I.31
- homomorphe I.31

Dimension I.19

Distance

- complètement invariante I.37
- simplement invariante I.38

Dual II.21

		Pages
E -	Ensemble (événement)	
	- accepté (défini, reconnu)	II.14,II.75
	- consistance d'un ensemble	II.37
	- de configurations grammaticales	I.11
	- engendré	I.19
	- étoile d'un ensemble	II.13
	- fermé par rapport aux préfixes	II.73
	- génératif	I.19
	- homomorphe	II.23
	- minimal	I.20
	- produit complexe d'ensembles	II.13
	- récursivement énumérable	II.5
	- régulier	II.14
	Equivalence	I.8
	- classe d'équivalence	I.8
	- des automates	II.40,II.50
	- des états	II.42
	- des machines séquentielles complètes	II.43
	- des termes réguliers	II.36
	- k-équivalence	II.44
	Etat	II.13
	- final	II.13
	- finalisant	II.68
	- initial	II.13
	- interne	II.13
	- suivant	II.13
	Expression régulière	II.35
F -	Famille des ensembles réguliers	II.41
	Fonction de reconnaissance	I.26
	- à distance minimum	I.47

Pages

- complètement invariante d'effort I.40
- des structures déformées I.33
- des structures pures I.26
- invariante (G) I.47
- invariante (℘) I.33
- par effort minimum I.47
- par vraisemblance maximum I.52
- simplement invariante d'effort I.40

Fonction
- de sortie II.42
- de transition (détat suivant) II.13

G - Génération (des ensembles d'images) I.18
Grammaire I.27 , II.5
- context-free II.6
- contextuelle II.5
- de structures déformées (de déformation) I.30
- de structures pures I.27
- formelle II.4
- image I.14
- métrique de déformation I.37
- probabiliste de déformation I.50
- régulière II.6

Grammatical I.7

H - Hiérarchie II.5
Homomorphe
- ensemble II.23
- déformation I.31

I - Idempotence I.16
Idendification I.13
Idendité I.12
Image I.14

		Pages
	Inclusion	II.61
	Indépendance	I.20
	Indice	I.13 , II.23
	Invariance	
	- à droite	II.22
	- à gauche	II.22
	- des types	I.8
	- (G)	I.33
	- ($\mathcal{G}$)	I.33
L -	Langage	II.4
	Libre	I.11
	Longueur(d'un mot)	II.12
M -	Machine séquentielle complète	II.41
	Masque (silhouette)	I.8
	Minimal	I.11
	Module	I.44
	Monoïde	I.11
	Monotonie	I.16
	Mot (ruban, bande)	II.12
	- accepté	II.14 , II.18 II.61 , II.67
	- rejeté	II.61
	- section d'un	II.12
N -	Noeud	II.73
	- terminal	II.72
	Normal	I.34
	Non-déterministique	II.17 , II.75
O -	Opérateur de réduction (ou de simplification)	I.15
	Ordre	I.7
P -	Préfixe	II.73
	Production	II.5

		Pages
	Produit	
	- complexe d'ensembles	II.13
	- direct d'automates	II.33
	Prototype	I.26
Q -	Quotient	I.35 , II.23
R -	Racine	II.72
	Reconnaissance	
	- de signes	I.9
	- de structures pures	I.26
	- de structures déformées	I.33
	- par effort minimum	I.47
	- par vraisemblance maximum	I.52
	Réduction	I.16
	Régulier	II.14 , II.35
	Ruban (mot)	II.12
	- de transition	II.68
S -	Section	II.12
	Segmentation	I.27
	Signe	I.6
	Significatif	I.9
	Silhouette (masque)	I.8
	Similitude	
	- des signes	I.8
	- des images	I.15
	Simplification	I.15
	Sondage	I.27
	Sous-programme	I.7
	Structure	
	- curviligne	I.79
	- cycliques	I.57
	- de contraste	I.91

		Pages
	- de permutation	I.64
	- de surfaces	I.95
	- déformée	I.31
	- différentielle	I.81
	- euclidienne	I.79
	- groupale	I.95
	- pure	I.26
	Symbole initial	I.5
	Synonymie	I.26
T -	Terme régulier	II.35
	Type (classe paradigmatique, sous programme)	I.7
U -	Unicité	I.22
V -	Vocabulaire (alphabet)	II.13
	- auxiliaire (non terminal)	II.5
	- terminal	II.5